SINTEZE LYCEUM

L. PANAITOPOL
I.C. DRĂGHICESCU

POLINOAME ȘI ECUAȚII ALGEBRICE

EDITURA ALBATROS

Scanned with OKEN Scanner

SINTEZE LYCEUM

L. PANAITOPOL
I. C. DRĂGHICESCU

POLINOAME ŞI ECUAŢII ALGEBRICE

EDITURA ALBATROS • 1980

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

În programa școlară, studiul polinoamelor și ecuațiilor algebrice ocupă un loc de seamă, atît datorită importanței lor pe plan teoretic, cît și a multiplelor și variatelor lor aplicații.

Prezenta lucrare își propune o prezentare sistematizată a unora din problemele fundamentale care privesc noțiunea de polinom și anume: construcția inelului polinoamelor peste un corp arbitrar, proprietăți ale sale, inelele de polinoame numerice.

Ea nu se substituie manualelor școlare, ci dorește să ajute la o adîncire a cunoștințelor din programa de liceu, prin prezentarea unor rezultate clasice importante, mai puțin familiare elevilor, precum și prin problemele și exercițiile care însoțesc fiecare capitol.

Lucrarea se adresează elevilor din liceele de toate specialitățile fiind utilă activității la clasă și în cercurile de elevi, precum și pentru pregătirea concursurilor de admitere în facultăți și a Olimpiadelor de matematică. Ea urmărește, de asemenea, ca elevii să capete o deschidere cît mai largă spre studiul sistematic al polinoamelor și ecuațiilor algebrice, iar prin aceasta să le înlesnească trecerea către studiul unei problematici de nivel mai înalt.

AUTORII

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul I

INELUL POLINOAMELOR DE O NEDETERMINATĂ PESTE UN CORP ARBITRAR

§ 1. PRELIMINARII

1. Problematica acestei cărți este tratată în cadrul diferitelor structuri algebrice, motiv pentru care găsim necesară o scurtă recapitulare a acelora pe care le vom folosi. Este vorba despre structuri determinate de către una sau două legi de compoziție internă pe o mulțime dată. Vom considera deci o mulțime de referință dată M, iar legile de compoziție vor fi, de regulă, cea aditivă „$+$" și cea multiplicativă „$\cdot$".

a) *Structuri determinate de către o singură lege de compoziție internă*:

— *semigrupul* este structura determinată pe mulțimea M de către o lege de compoziție internă asociativă;

— *semigrup unitar* sau *monoid* este semigrupul determinat pe mulțimea M de către o lege de compoziție internă față de care există element neutru în mulțimea M;

— *semigrup comutativ (abelian)* este semigrupul determinat de către o lege de compoziție internă care este comutativă;

— *grupul* este un semigrup unitar care are, în plus, proprietatea că, oricare element al său este simetrizabil în raport cu legea de compoziție internă dată (deci, dacă M este un grup aditiv, oricare element al său are un opus în M, iar dacă este un grup multiplicativ, oricare element al său are un invers în M); dacă legea este și comutativă atunci grupul este *comutativ (abelian)*.

b) *Structuri determinate de către două legi de compoziție internă:*

— *inel* este structura realizată pe mulțimea M de către două legi de compoziție internă (aditivă și multiplicativă)

dacă:

$$\begin{cases} (M, +) = \text{grup comutativ;} \\ (M, \cdot) = \text{semigrup;} \\ \text{legea a doua este distributivă față de prima;} \end{cases}$$

— inelul $(M, +, \cdot)$ este un *inel unitar* dacă semigrupul $(M, \cdot)$ este unitar;

— inelul $(M, +, \cdot)$ este un *inel comutativ (abelian)* dacă semigrupul $(M, \cdot)$ este comutativ;

— *corpul* este un inel unitar $(M, +, \cdot)$ în care orice element al său cu excepția elementului neutru față de prima lege de compoziție internă, este simetrizabil față de legea a doua (deci oricare element nenul din M are un invers în M);

— corpul $(M, +, \cdot)$ este *comutativ (abelian)* dacă semigrupul $(M, \cdot)$ este comutativ.

Mulțimile de numere pe care le vom folosi în cele ce urmează sînt

$N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ care este un monoid comutativ atît în raport cu adunarea, cît și în raport cu înmulțirea;

$Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ inelul unitar comutativ al numerelor întregi;

Q = corpul comutativ al numerelor raționale;
$\mathbf{R}$ = corpul comutativ al numerelor reale;
$\mathcal{C}$ = corpul comutativ al numerelor complexe.

2. În general, primul contact cu noțiunea de polinom se ia fie în urma operațiunilor cu monoame, fie în legătură cu problema rezolvării unor ecuații. Să ne reamintim că, în clasele mici, monomul ne-a apărut ca o expresie de forma $ax^m y^n$ construită numai prin înmulțiri și ridicări la putere, în care a este un număr dat numit coeficient, x și y sînt litere fără o semnificație anume (la nevoie le putem da diferite valori sau putem nota cu ele anumite entități), iar m și n sînt numere naturale, de asemenea, date. Într-un monom poate să apară o singură literă $\left(\text{cum este, de pildă, în cazul monoamelor } 2x;\ -3x^2;\ \frac{2}{3}x^5\right)$ sau pot să apară mai multe litere (de pildă, xy^2; $-2xy^3z$).

Scanned with OKEN Scanner

În legătură cu adunările sau scăderile de monoame apar expresii de forma:

$$P(x) = 2x^3 - 7x^2 + \frac{3}{2}x;$$

$$Q(x, y) = x^4 - 5x^3y + x^2y^2 - \frac{1}{7}xy^3 - 9y^4$$

care au fost numite polinoame, iar în scrierea lor pot să apară și termeni care nu conțin literele, cum este în cazul $R(x) = x^2 + 3x + 7$ ceea ce concordă cu sensul dat inițial noțiunii de monom, pentru că, după cum s-a văzut apoi (definindu-se puterea zero) constantele sînt monoame de gradul zero.

Tot în spiritul unei astfel de prezentări s-a desprins apoi faptul că, într-o ecuație scrisă, de pildă, sub forma:

$$2x + 3y = 0;\ 3x^2 - x + 9 = 0;$$

$$x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x + 5 = 0$$

$$x^2 + 2xy^3 - 5xyz^2 + 3y^2 - 7xz^4 + 9z - 10 = 0$$

expresia care apare în membrul stîng este un polinom.

Acest mod de abordare a noțiunii de polinom reprezintă, de fapt, degajarea ei într-o strînsă legătură cu operațiile cunoscute (adunare, scădere, înmulțire, ridicare la putere) în mulțimile de numere cu care lucrăm în mod curent (numere naturale, întregi, raționale, reale, complexe). Vom face în legătură cu el cîteva precizări, care, după cum se va vedea, ne vor permite apoi, să lărgim sfera noțiunii de polinom.

Mai întîi vom desprinde observația că în exprimarea polinoamelor (și în particular a monoamelor), așa cum a fost ea schițată mai înainte, rolul esențial îl au coeficienții și exponenții literelor, în timp ce acestea din urmă nu joacă un rol deosebit (Am precizat deja că, în general, ele nu au o semnificație anumită). În această viziune, a face o anumită operație între polinoamele:

$$P_1(x, y) = x^3y - 5x^2 + 7y + 4;$$
$$P_2(x, y) = xy^2 + 2x^2 - y^2 + 1$$

este în esență același lucru cu a face operația respectivă între polinoamele:

$$P_1(u, v) = u^3v - 5u^2 + 7v + 4;$$
$$P_2(u, v) = uv^2 + 2u^2 - v^2 + 1$$

Scanned with OKEN Scanner

după cum, toate problemele ce ne pot interesa în legătură cu ecuația:

$$3x^5 - 7x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 9x + 16 = 0$$

sînt identice cu cele legate de ecuația:

$$3y^5 - 7y^4 - 2y^3 + 10y^2 - 9y + 16 = 0.$$

Este esențial faptul că, de fiecare dată, literele sînt implicate în operații (adunări, scăderi, înmulțiri, ridicări la putere) care au sens, adică ele aparțin unor mulțimi în care respectivele operații sînt peste tot definite și satisfac proprietățile corespunzătoare. Or noi, în general, am considerat aceste litere ca simbolizînd numere oarecare reale sau complexe, iar mulțimile acestor numere fiind corpuri comutative, operațiile de adunare, scădere, înmulțire, ridicare la putere au sens în ele[1].

§ 2. POLINOM DE O NEDETERMINATĂ PESTE UN CORP K

Să considerăm în general o mulțime X conținînd cel puțin două elemente în care se dă o lege de compoziție internă notată multiplicativ, în raport cu care există în X un element neutru e_x și care satisface următoarele axiome:

$$x^0 = e_x;\ x^1 = x;\ x^m \cdot x^n = x^n \cdot x^m = x^{m+n};$$

$$x^m \neq x^n \text{ dacă, } m \neq n \text{ și } x \neq e_x.$$

oricare ar fi $x \in X$ și $m, n \in N$.

În felul acesta se vede că, dacă $x \in X$, atunci $x^n \in X$, $n \in N$.

Într-adevăr, prin inducție completă $x^0 = e_x \in X$; $x^1 = x \in X$, iar dacă $x^n \in X$ atunci $x^{n+1} = x^n \cdot x^1 = x^n \cdot x \in X$.

---

[1] Propunem ca exercițiu să se arate că dacă o mulțime A este un semigrup față de legea de compoziție internă $*$ atunci, oricare ar fi elementul $a \in A$, elementul $\underbrace{[(a*a)*...]*a}_{n \text{ ori}}$ este bine determinat în A, iar dacă acesta se notează a^n atunci $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ și $(a^m)^n = a^{mn}$ unde considerăm $a^1 = a$; regulile se mențin și în cazul puterii zero dacă se ia $a^0 = e$ (elementul neutru din A față de legea $*$). De asemenea, să se arate că dacă legea este comutativă atunci $(a * b)^n = a^n * b^n$.

Scanned with OKEN Scanner

Să mai considerăm mulțimea K un corp comutativ și fie cuplul (a, x^n) format cu elementele $a \in K$ și $x^n \in X$, deci $(a, x^n) \in K \times X$. Atașăm acestui cuplu un nou element, unic determinat, pe care îl notăm ax^n. (Atragem atenția că aceasta este o notație, iar nu o operație între a și x^n.) Un astfel de element îl vom numi *monom*, iar componentele lui le vom denumi după cum urmează: a = coeficient; x = nedeterminată; n = gradul monomului. Vom spune că două astfel de monoame sînt *asemenea* dacă au același grad. K este *domeniul de operatori* al monoamelor și admitem ca axiomă că, oricare ar fi $a, b \in K$ atunci $a(bx^n) = abx^n$.

De asemenea, convenim să luăm $a_0x^0 = a_0$.

Definiția 1. O expresie de forma:

$$a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a^nx_n$$

se numește polinom de nedeterminata x peste corpul K.

Pentru moment această expresie o înțelegem în sensul unei înlănțuiri de monoame care nu sînt asemenea, cu nedeterminata $x \in X$ și coeficienții $a_i \in K$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ deci nu ca simbol al unor operații.

Mulțimea de coeficienți $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ care, în fapt, este un șir finit de elemente din K este luată la întîmplare din această mulțime; în particular, unii din termenii acestui șir pot fi nuli. Vom numi *gradul unui polinom* exponentul acelui monom cu coeficient nenul din scrierea polinomului, care are gradul cel mai mare. Coeficientul acestuia se numește *coeficient dominant*.

Mulțimea tuturor polinoamelor de nedeterminata x peste corpul K o notăm $K[x]$. Prin urmare, un element din $K[x]$ este un polinom de nedeterminata x și ceea ce îl definește este șirul coeficienților $a_0, a_1, \ldots, a_n$ care sînt elemente din K. În felul acesta, un polinom din $K[x]$ se poate scrie fie sub forma:

$$P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

sau sub forma:

$$P = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Totodată ne dăm seama că este esențial ca, atunci cînd este vorba despre un polinom, să știm mulțimea $K[x]$ din care face el parte[1].

[1] Asupra altor modalități de construcție a unui inel de polinoame se pot consulta lucrările [1], [6].

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm acum două polinoame P_1 și P_2 din $K[x]$:

$$P_1 = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n);\ P_2 = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m)$$

Definiția 2. Polinoamele P_1 și P_2 sînt egale dacă, coeficienții corespunzători monoamelor asemenea sînt egali.

Conform acestei definiții rezultă că două polinoame egale nu pot să difere decît prin monoame care au coeficienții nuli. În plus, să facem următoarele observații:

1) — două polinoame egale au în mod necesar același grad;

2) — relația de egalitate a polinoamelor astfel definită este o relație de echivalență (verificarea axiomelor este imediată).

Definiția 3. Considerînd $n \geqslant m$ (ceea ce nu afectează concluziile) numim *sumă* a polinoamelor P_1 și P_2 polinomul pe care îl notăm $P_1 + P_2$ definit prin:

$$P_1 + P_2 = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots, a_m + b_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n).$$

Observație. Atragem atenția că simbolul $+$ din scrierea polinomului sumă $P_1 + P_2$ nu are aceeași semnificație cu cea pe care i-o cunoaștem în alte mulțimi, de pildă în N sau în K.

Propoziția 1. Suma de polinoame definește în mulțimea $K[x]$ o structură de grup comutativ.

Într-adevăr,

a) — deoarece K este un corp comutativ se observă cu ușurință că $(P_1 + P_2)(x) \in K[x]$, iar adunarea polinoamelor este o operație asociativă și comutativă;

b) — considerînd polinomul $0(x)$ care are toți coeficienții nuli

$$0 = (0, 0, 0, \ldots, 0)$$

se vede că oricare ar fi $P(x) \in K[x]$, $P(x) = x_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n$ avem:

$$P(x) + 0(x) = (a_0 + 0)x^0 + (a_1 + 0)x^1 + (a_2 + 0)x^2 + \ldots + (a_n + 0)x^n = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = P(x);$$

așadar polinomul $0(x)$ pe care îl numim *polinom nul* este elementul neutru al mulțimii $K[x]$ față de adunarea polinoamelor;

c) — dacă notăm cu $-P(x)$ polinomul definit prin șirul:

$$(-a_0, -a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$$

Scanned with OKEN Scanner

observăm că:

$$-P(x) = (-a_0)x^0 + (-a_1)x^1 + (-a_2)x^2 + \ldots + (-a_n)x^n \in K[x]$$

și în plus:

$$P(x) + [-P(x)] = [a_0 + (-a_0)]x^0 + [a_1 + (-a_1)]x^1 + \ldots + [a_n + (-a_n)]x^n = 0x^0 + 0x_1 + \ldots + 0x^n = 0(x),$$

adică polinomul $P(x)$ are un opus în $K[x]$, iar acesta este $-P(x)$ pe care îl scriem sub forma:

$$-P(x) = -a_0x^0 - a_1x^1 - a_2x^2 - \ldots - a_nx^n.$$

Proprietățile exprimate prin a), b), c) dovedesc afirmația din propoziția 1.

Observație. Definiția pe care am dat-o adunării polinoamelor face ca simbolul + să capete semnificația de adunare și atunci cînd apare în scrierea unui polinom:

$$P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

deoarece este vorba despre adunarea polinoamelor a_0x^0, a_1x^1, a_2x^2, ..., a_nx^n din $K[x]$ care se definesc prin șirurile:

$$\begin{array}{l}(a_0, 0, 0, 0, \ldots, 0, 0)\\ (0, a_1, 0, 0, \ldots, 0, 0)\\ (0, 0, a_2, 0, \ldots, 0, 0)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (0, 0, 0, 0, \ldots, 0, a_n)\end{array}$$

De aceea, monoamele a_kx^k $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ le vom numi *termenii polinomului.*

Definiția 4. Numim *produs* al polinoamelor P_1 și P_2 polinomul pe care îl notăm P_1P_2 definit prin:

$$P_1P_2 = (c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{m+n})$$

unde:

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_ib_j; \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n; \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m;$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, m + n.$$

Propoziția 2. Produsul de polinoame este o operație internă în $K[x]$ asociativă, comutativă și distributivă față de adunare.

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr,

a) — se vede din definiție, că oricare ar fi P_1, $P_2 \in K[x]$, atunci $(P_1P_2)(x) \in K[x]$, iar gradul polinomului produs este egal cu suma gradelor polinoamelor care se înmulțesc.

b) — produsul este comutativ deoarece:

$$\sum_{j+i=k} a_i b_j = \sum_{j+i=k} b_j a_i; \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n; \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m;$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, m + n.$$

c) — produsul este asociativ deoarece, considerînd trei polinoame oarecare P_1, P_2, P_3 din $K[x]$:

$$P_1 = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n); \; P_2 = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m);$$

$$P_3 = (c_0, c_1, c_2, \ldots, c_p)$$

atunci, polinomul $(P_1P_2)P_3$ are coeficientul termenului general egal cu:

$$\sum_{r+k=l} \left(\sum_{i+j=r} a_i b_j \right) c_k \quad \begin{matrix} i = 0, 1, 2, \ldots, n; \; j = 0, 1, 2, \ldots, m; \\ k = 0, 1, 2, \ldots, p; \; l = 0, 1, 2, \ldots, m + n + p, \end{matrix}$$

iar polinomul $P_1(P_2P_3)$ are coeficientul termenului general egal cu

$$\sum_{i+r=l} a_i \left(\sum_{j+k=r} b_j c_k \right) \quad \begin{matrix} i = 0, 1, 2, \ldots, n; \; j = 0, 1, 2, \ldots, m; \\ k = 0, 1, 2, \ldots, p; \; l = 0, 1, 2, \ldots, m+n+p \end{matrix}$$

și este adevărată egalitatea:

$$\sum_{r+k=l} \left(\sum_{i+j=r} a_i b_j \right) c_k = \sum_{i+r=l} a_i \left(\sum_{j+k=r} b_j c_k \right) = \sum_{i+j+k=l} a_i b_j c_k;$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots, n; \; j = 0, 1, 2, \ldots, m; \; k = 0, 1, 2, \ldots, p;$$

$$l = 0, 1, 2, \ldots, n + m + p$$

d) — produsul de polinoame este distributiv față de sumă deoarece, considerînd polinoamele P_1, P_2, P_3 de mai înainte, polinomul $P_1(P_2 + P_3)$ are coeficientul termenului general egal cu:

$$\sum_{i+j=k} a_i (b_j + c_j) \quad \text{unde} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

și presupunînd $m \geqslant p$ (ceea ce nu influențează concluziile) atunci $j = 0, 1, 2, \ldots, m$ (considerîndu-se $c_{p+1} = c_{p+2} = \ldots = c_m = 0$); $k = 0, 1, \ldots, m + n$.

Scanned with OKEN Scanner

Dar avem:

$$\sum_{i+j=k} a_i(b_j+c_j) = \sum_{i+j=k} a_ib_j + \sum_{i+j=k} a_jc_j = \sum_{i+j=k} a_ib_j + \sum_{i+l=r} a_ic_l,$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots, n;\ j = 0, 1, 2, \ldots, m;\ l = 0, 1, 2, \ldots, p$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n+m;\ r = 0, 1, 2, \ldots, n+p$$

adică tocmai coeficientul termenului general al sumei de polinoame $P_1P_2 + P_1P_3$.

Cele dovedite la a), b), c), d) pun în evidență valabilitatea afirmației din propoziția 2.

Dar, afirmațiile din propozițiile 1 și 2 exprimă faptul că pe mulțimea $K[x]$ cele două operații (adunarea și înmulțirea) definesc o structură de *inel comutativ*. Mai mult chiar, acest inel este unitar deoarece polinomul particular $I(x) = e_kx^0$ (e_k = elementul unitar din K) reprezintă, după cum se poate verifica ușor, elementul din $K[x]$ neutru față de înmulțirea polinoamelor.

Inelul $K[x]$ nu este un corp deoarece există în el elemente nenule care nu sînt inversabile. Se poate considera, de pildă, polinomul $P(x) = x$ și se vede cu ușurință că el nu are un invers în $K[x]$.

Observații. 1. Mulțimea K a fost considerată un corp comutativ și această presupunere a influențat decisiv modul cum este structurată mulțimea $K[x]$ de către operațiile de adunare și înmulțire definite în ea. Se poate însă ca, în loc să fie un corp, mulțimea K să aibă altă structură și atunci putem obține familii de polinoame care să nu fie inele. Dacă, de pildă, luăm $K = N$, obținem mulțimea $N[x]$ a polinoamelor de o nedeterminată cu coeficienți naturali, care este structurată ca un monoid comutativ atît de adunarea, cît și de înmulțirea polinoamelor.

Dacă însă luăm $K \in \{Z, Q, R, \mathcal{C}\}$, obținem următoarele familii de polinoame de o nedeterminată:

$Z[x]$ = inelul polinoamelor întregi;

$Q[x]$, $R[x]$, $\mathcal{C}[x]$ = inelele polinoamelor cu coeficienți raționali, reali sau complecși respectiv.

2. Pentru polinoamele folosite în mod frecvent (polinoamele numerice) se consideră drept mulțime X fie corpul $\mathbf{R}$ al numerelor reale, fie corpul $\mathcal{C}$ al numerelor complexe. Există, însă, posibilitatea de a considera drept mulțime X și alte mulțimi, cu condiția ca acestea să satisfacă cerințele impuse mulțimii X.

3. În cazul în care mulțimea X coincide cu corpul K literele care apar în scrierea unui polinom $P \in K[x]$ sînt legate

Scanned with OKEN Scanner

prin operații. (Este vorba, desigur, despre operațiile din K). Rezultă că, dacă în polinomul:

$$P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \in K[x]$$

se înlocuiește x printr-un element $x_0 \in K$, atunci avem:

$$P(x_0) = a_0x^0 + a_1x_0^1 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n \in K.$$

Numim acest element valoarea polinomului P în x_0.

4. Am văzut că, dacă $P, Q \in K[x]$ atunci

$$\text{grad}(P \cdot Q) = \text{grad } P + \text{grad } Q.$$

Considerînd acum $P(x) = 0$ (polinomul nul) și $Q(x) = x$ avem $0x = 0$, de unde grad 0 + grad x = grad 0, adică grad $0 + 1 =$ grad 0, egalitate, evident, absurdă în mulțimea N a numerelor naturale. Din această cauză vom spune că polinomul nul are grad nedeterminat (se mai spune că el nu are grad sau că are gradul $-\infty$).

Această precizare se impune cu atît mai mult cu cît pentru toate celelalte polinoame din inelul $K[x]$ gradul reprezintă ceva bine determinat.

§ 3. RELAȚIA DE DIVIZIBILITATE ÎN INELELE DE POLINOAME

Fie inelul de polinoame $K[x]$ și să considerăm două elemente arbitrare din el P și Q. Am văzut în paragraful anterior, că produsul lor $P \cdot Q$ este tot un polinom din $K[x]$ al cărui grad este egal cu suma gradelor celor două polinoame. Dacă notăm acest polinom cu $D(x)$ avem așadar

$$D(x) = P(x) \cdot Q(x);\ \text{grad } D = \text{grad } P + \text{grad } Q.$$

Aceasta ne sugerează a considera și problema reciprocă acesteia și anume de a răspunde la întrebarea dacă, dîndu-se un polinom D din inelul $K[x]$, există sau nu două polinoame în $K[x]$ al căror produs să fie polinomul D.

Definiția 1. Dacă dîndu-se polinoamele D și P din $K[x]$ există polinomul Q din $K[x]$, astfel că produsul PQ este egal cu polinomul D, atunci spunem că polinomul P este un *divizor* al polinomului D (D este divizibil prin P) sau că polinomul D este un *multiplu* al polinomului P.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece

$$\text{grad } D = \text{grad } P + \text{grad } Q$$

rezultă că

$$\text{grad } P \leqslant \text{grad } D.$$

Dacă grad $P = 0$ sau grad $P =$ grad D atunci spunem că P este un *divizor impropriu* al lui D, iar dacă

$$0 < \text{grad } P < \text{grad } D$$

spunem că P este un *divizor propriu* al lui D.

Observații

1. Se verifică ușor că relația de divizibilitate în $K[x]$ este reflexivă și tranzitivă, dar nu este simetrică. În consecință ea nu este o relație de echivalență în $K[x]$.

2. În cazul în care K este un corp numeric, conform definiției 1 deducem că dacă $P \in K[x]$ este un polinom de gradul n atunci divizorii săi improprii sînt elementele $k \in K - \{0\}$ (acestea fiind polinoamele de grad zero din $K[x]$), precum și polinoamele $kP \in K[x]$, $k \in K - \{0\}$ (polinoame de același grad cu P din $K[x]$).

3. Dacă un polinom $P \in K[x]$ este un divizor al polinoamelor Q_1 și Q_2 din $K[x]$, atunci el este divizor și al sumei $Q_1 + Q_2$, precum și al produsului Q_1Q_2. Demonstrația este imediată și o lăsăm ca exercițiu. Reciproca acestei proprietăți nu este adevărată, iar acest lucru se poate dovedi prin contraexemple.

Definiția 2. Un polinom din inelul $K[x]$ care nu are în acest inel alți divizori în afară de divizorii improprii se numește *ireductibil* peste inelul $K[x]$. În caz contrar el se numește *reductibil* peste $K[x]$.

Observații

1. Am arătat că se pot construi polinoame și pe structuri care nu sînt corpuri. Să considerăm un corp K și fie K' o parte a sa înzestrată cu aceleași legi de compoziție, peste care construim familia de polinoame $K'[x] \subset K[x]$. Și în $K'[x]$ se pot defini, analog modului în care am făcut-o în $K[x]$, relația de divizibilitate și noțiunea de polinom ireductibil. Este însă posibil ca un polinom $P \in K'[x]$ să fie ireductibil în această mulțime, dar același polinom să fie reductibil în $K[x]$.

Scanned with OKEN Scanner

Exemple. 1) Polinomul $P(x) = -2x^2 + 5x - 3 \in Z[x]$ este reductibil deoarece el este egal cu produsul polinoamelor $2x - 3$ și $-x + 1$ din $Z[x]$.

2) Polinomul $Q(x) = 3x^2 + 2 \in N[x]$ este ireductibil. Într-adevăr, pentru a fi reductibil este necesar ca el să aibă divizori proprii în $N[x]$. Cum gradul acestora trebuie să fie cuprins între zero și doi, rezultă că el trebuie să fie egal cu unu. Aceasta înseamnă că polinomul Q ar trebui să se scrie sub forma

$$3x^2 + 2 = (ax + b)(cx + d)$$

unde $ax + b$ și $cx + d$ trebuie să fie polinoame din $N[x]$.

Făcînd însă produsul din membrul drept al acestei egalități rezultă, prin identificarea coeficienților, că trebuie ca

$$ac = 3;\ ad + ac = 0;\ bd = 2.$$

Cum numerele a, b, c, d sînt din N se vede imediat că, nu putem găsi patru astfel de numere care să satisfacă simultan cele trei egalități.

3) Polinomul $R(x) = 2x^2 - 5$ din $Z[x]$ este ireductibil în această mulțime, dar este reductibil în $R[x]$ el putîndu-se scrie sub forma $R(x) = (\sqrt{2}\,x - \sqrt{5})(\sqrt{2}\,x + \sqrt{5})$.

2. Toate polinoamele de gradul întîi dintr-o mulțime de polinoame sînt ireductibile peste aceasta, deoarece neexistînd nici un număr natural n, $0 < n < 1$ ele nu pot avea divizori proprii.

Teoremă. Dîndu-se inelul de polinoame $K[x]$ atunci oricare ar fi P un element al său acesta se poate scrie ca un produs finit de polinoame ireductibile din inelul $K[x]$.

Demonstrație. Fie grad $P = n > 0$. Dacă P este ireductibil teorema este demonstrată, numărul factorilor ireductibili din produs fiind egal cu 1. Dacă însă P este reductibil peste $K[x]$ atunci el se poate scrie sub forma unui produs de cel puțin două polinoame din $K[x]$, iar pentru fiecare din acestea raționăm ca mai înainte. Cum gradul fiecărui nou divizor propriu pe care îl găsim scade, finalmente nu putem obține decît sau divizori proprii avînd gradele mai mici ca n, dar mai mari ca unu, sau divizori de gradul întîi despre care am arătat că sînt ireductibili. Oricum numărul acestora este finit, deoarece suma gradelor lor este egală cu n.

Scanned with OKEN Scanner

§ 4. ALGORITMUL ÎMPĂRȚIRII ÎN INELELE DE POLINOAME

Am văzut în paragraful precedent că două polinoame dintr-un inel $K[x]$ pot fi legate prin relația de divizibilitate. De cele mai multe ori însă, între ele nu există o astfel de relație. Cu privire la aceste cazuri dăm următoarea teoremă cunoscută sub numele de

Teorema împărțirii cu rest

Dîndu-se în inelul $K[x]$ polinoamele D și I dintre care cel puțin unul este nenul — fie acesta I — atunci există două polinoame C și R în $K[x]$ astfel că:

a) $D = I \cdot C + R$ cu grad $R <$ grad I;

b) polinoamele C și R sînt unic determinate (abstracție făcînd, eventual, de un factor constant nenul).

Demonstrație. Punctul b) al teoremei rezultă prin reducere la absurd. Într-adevăr, dacă ar mai exista alte două polinoame în $K[x]$, fie acestea C' și R' astfel ca:

$$D = I \cdot C' + R' \text{ cu grad } R' < \text{grad } I$$

conform cu a) ar rezulta, prin scădere, că:

$$I(C - C') + R - R' = 0$$

și în consecință $\text{grad}(R - R') = \text{grad } I(C' - C)$.

Cum însă tot în baza afirmației a) avem

$$\text{grad}\,(R - R') \leqslant \text{Max}\{\text{grad } R, \text{grad } R'\} < \text{grad I}$$

rezultă că: $\text{grad}\,(R - R') < \text{grad } I(C' - C)$,

ceea ce contrazice egalitatea de mai sus.

În ceea ce privește existența polinoamelor C și R, aceasta se pune în evidență printr-o construcție efectivă a celor două polinoame realizată prin algoritmul următor.

Să presupunem că cele două polinoame date D și I sînt:

$$D(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_nx^0$$

$$I(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_mx^0.^1$$

[1] Se folosește și o astfel de scriere a polinoamelor cu indicii coeficienților în ordine crescătoare, iar gradele monoamelor în ordine descrescătoare.

Scanned with OKEN Scanner

Am presupus prin ipoteză că, polinomul $I(x)$ este diferit de polinomul nul și vom distinge în continuare următoarele două situații posibile:

$$n < m; \qquad n \geqslant m.$$

Dacă $n < m$ atunci putem lua $C(x) = 0(x) =$ polinomul nul și $R(x) = D(x)$ încît avem grad $R = n < m =$ grad I și teorema este demonstrată.

Dacă $n \geqslant m$ atunci fie $q_1 = \frac{a_0}{b_0} x^{n-m}$ și considerăm polinomul $P_1 = D - I \cdot q_1$ care are expresia:

$$P_1(x) = \left(a_1 - b_1 \cdot \frac{a_0}{b_0}\right) x^{n-1} + \ldots$$

Rezultă că grad $P_1 \leqslant n - 1$ și din nou distingem două cazuri:

— dacă grad $P_1 <$ grad I atunci problema este rezolvată deoarece avem $D = I \cdot q_1 + P_1$ și putem lua $C = q_1$; $R = P_1$;

— dacă însă grad $P_1 \geqslant$ grad I notăm:

$$P_1(x) = a_0' x^{m_1} + a_1' x^{m_1 - 1} + \ldots$$

și la fel ca mai înainte considerăm:

$$q_2 = \frac{a_0'}{b_0} x^{m_1 - m} \text{ și polinomul } P_2 = P_1 - I \cdot q_2$$

pentru care grad $P_2 \leqslant m_1 - 1$.

Dacă grad $P_2 <$ grad I atunci problema este rezolvată pentru că avem

$$P_1 = I \cdot q_2 + P_2 \text{ și } D = I(q_1 + q_2) + P_2$$

și vom lua

$$C = q_1 + q_2, \text{ iar } R = P_2.$$

Dacă, însă, grad $P_2 \geqslant$ grad I procedăm la fel ca mai înainte.

Deoarece:

$$\text{grad } P_2 < \text{grad } P_1 < \text{grad } D$$

ne dăm seama că eventualele alte polinoame P_3, P_4, ... obținute precum P_1 și P_2 au gradele alcătuind un șir de numere naturale strict descrescător. Din această cauză, după un anumit număr de operațiuni vom găsi un polinom P_k astfel că grad $P_k <$ grad I.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultatele obținute sînt următoarele:

$$P_1 = D - I \cdot q_1$$
$$P_2 = P_1 - I \cdot q_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_k = P_{k-1} - I \cdot q_k$$

și se vede că din ele rezultă prin însumare:

$$D = I(q_1 + q_2 + \ldots + q_k) + P_k.$$

Cu aceasta problema este complet rezolvată deoarece putem lua

$$C = q_1 + q_2 + \ldots + q_k \quad \text{și} \quad R = P_k,$$

iar

$$\text{grad } R = \text{grad } P_k < \text{grad } I.$$

Observație. Algoritmul de mai sus, după cum ușor se poate vedea, exprimă tocmai binecunoscutul procedeu după care se face împărțirea a două polinoame numerice. Vom numi polinomul C *cîtul*, iar R *restul* împărțirii polinoamelor D și I.

Consecințe

1. Dacă două polinoame se înmulțesc cu un al treilea (care este nenul), atunci cîtul lor nu se schimbă, iar restul este înmulțit și el cu cel de-al treilea polinom;

Dacă două polinoame se divid printr-un al treilea (care este nenul) atunci și restul împărțirii lor este divizibil prin acesta.

Demonstrația acestor proprietăți este imediată.

2. Dacă $I(x) = x - a$ unde $a \in K$ avem $D(x) = (x - a) \cdot C(x) + r$ și cum grad $(x - a) = 1$ rezultă că grad $r = 0$ adică $r \in K$.

Luînd acum $x = a$ și înlocuind obținem $D(a) = 0 \cdot C(a) + r$ sau $r = D(a)$, ceea ce ne arată că, restul împărțirii unui polinom prin $x - a$ se poate obține înlocuind x cu a în expresia polinomului, adică este egal cu valoarea polinomului în $x = a$.

3. Dacă restul este egal cu zero, atunci $D = C \cdot I$ deci polinomul D este divizibil prin polinomul I. Atunci, din cele expuse la punctul anterior rezultă că, *o condiție necesară și suficientă ca un polinom să fie divizibil printr-un polinom de forma $x - a$ este ca el să se anuleze dacă înlocuim în expresia lui pe x cu a.*

Scanned with OKEN Scanner

Acele valori $x = a \in K$ pentru care polinomul se anulează le numim *rădăcinile* polinomului. Altfel spus, conform celor de mai nainte, $x = a \in K$ *este o rădăcină a polinomului* $P \in K[x]$ *dacă acesta este divizibil la* x — a. Dacă P este divizibil prin $(x - a)^k$, dar nu este divizibil prin $(x - a)^{k+1}$, $k = 2, 3, \ldots$, grad P spunem că $x = a$ este o *rădăcină multiplă de ordin* k *a lui* P. În cazul $k = 1$ tratat anterior spunem că $x = a$ este o *rădăcină simplă a lui* P.

4. Un polinom de gradul n are cel mult n rădăcini. Demonstrăm valabilitatea acestei afirmații prin inducție completă.

Pentru $n = 1$ avem $P(x) = ax + b$ care se anulează pentru $x = -\frac{b}{a}$ (ecuația de gradul întîi se poate rezolva într-un corp comutativ).

Dacă admitem că un polinom oarecare de grad $n - 1$ are cel mult $n - 1$ rădăcini, atunci presupunînd grad $P = n$ și considerînd $x = a \in K$ o rădăcină a lui, rezultă că

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x) \text{ cu grad } Q = n - 1.$$

Cum în afara valorii $x = a$ polinomul **P** se anulează dacă și numai dacă Q se anulează, rezultă că rădăcinile lui P sînt $x = a$ împreună cu toate rădăcinile lui Q. În consecință, P are cel mult n rădăcini.

5. Să presupunem că luăm $X = \mathbf{R}$, $K = \mathbf{R}$ și considerăm inelul de polinoame $R[x]$. Dacă P este un element din $R[x]$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

și fixăm pentru nedeterminata x o valoare $x = x_0 \in \mathbf{R}$ pe care apoi o înlocuim în expresia polinomului P și efectuăm operațiile obținem numărul real $P(x_0)$ = valoarea polinomului P în $x = x_0$. Cum prin intermediul polinomului $P = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ oricărui număr real x i se poate pune în corespondență numărul real unic determinat $P(x)$, deducem că, se poate defini funcția:

$$x \to P(x) \text{ cu } x \in \mathbf{R} \text{ și } P(x) \in \mathbf{R}.$$

Funcția astfel definită o numim *funcție polinomială* și o notăm

$$f_P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}.$$

Se vede că un polinom P și funcția polinomială care se definește cu ajutorul lui sînt noțiuni distincte. Ele nu se confundă.

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm însă și cazul general al unui polinom P dintr-un inel oarecare $K[x]$ de polinoame:

$$P(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^3 + \ldots + a_nx^n$$

și la fel ca în cazul particular la care ne-am referit mai înainte, $X = K$; fie un element arbitrar $x_0 \in K$ pe care îl fixăm și-l înlocuim apoi în $P(x)$; obținem elementul $P(x_0) \in K$. În felul acesta, prin intermediul polinomului P, putem face ca la fiecare element $x \in K$ să-i punem în corespondență elementul $P(x) \in K$ unic determinat. Cu alte cuvinte, definim o funcție de la corpul K în el însuși și o notăm:

$$f_P : K \to K.$$

Este funcția polinomială corespunzătoare polinomului P și ne dăm seama că analog, oricărui polinom $P \in K[x]$ îi putem pune în corespondență o funcție polinomială $f_P : K \to K$.

Este însă posibil, ca la două polinoame diferite din același inel de polinoame, să corespundă una și aceeași funcție polinomială.

De pildă, dacă luăm corpul $K = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$ al claselor de resturi modulo 3 și polinoamele:

$$P(x) = x^5 - x + \hat{1}; \quad Q(x) = x^3 - x + \hat{1}$$

atunci, deoarece:

$$P(\hat{0}) = Q(\hat{0}) = \hat{1}; \; P(\hat{1}) = Q(\hat{1}) = \hat{1}; \; P(\hat{2}) = Q(\hat{2}) = \hat{1},$$

cele două polinoame definesc o aceeași funcție și anume funcția care duce toate elementele din K, în elementul $\hat{1}$ din K.

Trebuie însă să precizăm că, în exemplul pe care l-am luat intervine esențial faptul că mulțimea K este un corp finit. În cazul în care corpul K este un corp infinit este valabilă următoarea

Teoremă. Dacă polinoamele P și Q din inelul de polinoame $K[x]$ definesc aceeași funcție polinomială, iar corpul K este infinit, cele două polinoame sînt egale.

Într-adevăr, considerăm polinomul $P - Q \in K[x]$ și funcția polinomoală:

$$f(x) = (P - Q)(x) = P(x) - Q(x)$$

Scanned with OKEN Scanner

definită pe K și cu valori în K. Deoarece prin ipoteză P și Q definesc aceeași funcție polinomială rezultă că:

$$P(x) = Q(x) \text{ pentru orice } x \in K.$$

Deoarece grad $(P - Q) \leqslant \text{Max}\{\text{grad } P, \text{ grad } Q\}$, atunci, conform celor de mai sus, polinomul $P - Q$ are în K un număr de rădăcini mai mare decît gradul său, ceea ce contrazice cele stabilite la punctul 4. El nu poate fi decît polinomul nul și deci $P = Q$.

§ 5. DESCOMPUNEREA ÎN FACTORI IREDUCTIBILI ÎN INELUL $K[x]$

Definiția 1. Dîndu-se polinoamele P și Q din inelul $K[x]$ se numește cel mai mare divizor comun al lor (c.m.m.d.c.) un polinom $I \in K[x]$ care are următoarele proprietăți:

— I divide atît polinomul P, cît și polinomul Q;

— orice divizor comun al polinoamelor P și Q divide polinomul I.

Cel mai mare divizor comun al polinoamelor P și Q se notează (P, Q), iar existența lui se dovedește prin următoarea

Teoremă. Dacă P și Q sînt două polinoame din $K[x]$ atunci există un polinom I în $K[x]$ care este cel mai mare divizor comun al lor, precum și două polinoame P_1 și Q_1 tot din $K[x]$ astfel încît:

$$I = P \cdot P_1 + Q \cdot Q_1.$$

Renunțăm a da demonstrația acestei teoreme (ea poate fi găsită în lucrările de specialitate menționate în bibliografie); se bazează pe un raționament analog celui de la teorema împărțirii cu rest și precizăm că în ea rezidă și procedeul efectiv de aflare a polinomului $I = (P, Q)$, care este binecunoscutul *algoritm al lui Euclid*. Vom vedea însă că partea a doua a teoremei ne conduce la consecințe foarte importante.

Definiția 2. Două polinoame al căror c.m.m.d.c. este de gradul zero se zic prime între ele.

Scanned with OKEN Scanner

Exemple

a) — polinoamele

$$P_1(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 1;\ Q_1(x) = x^2 + x - 2$$

au $(P_1, Q_1) = -28$ și prin urmare sînt prime între ele;

b) — polinoamele

$$P_2(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1;\ \ Q_2(x) = x^2 + x - 2$$

au $(P_2, Q_2) = x - 1$ și deci nu sînt prime între ele.

Observație. Convențional se notează $(P, Q) = e$ dacă polinoamele P și Q sînt prime între ele. În cazul cînd K este un corp numeric avem $e = 1$. Atunci din teorema de mai sus rezultă o condiție necesară și suficientă ca două polinoame P și Q să fie prime între ele și anume, să existe în $K[x]$ două polinoame P_1 și Q_1 astfel încît să fie valabilă egalitatea:

$$P \cdot P_1 + Q \cdot Q_1 = e_k.$$

Acest rezultat constituie *teorema lui Bézout.*

Consecințe. 1. Dacă P, Q, R sînt polinoame din $K[x]$ astfel încît polinomul P divide produsul $Q \cdot R$ și este prim cu unul din factori, atunci el divide celălalt factor.

Într-adevăr, dacă polinomul P este prim cu Q, conform teoremei lui Bézout, există în $K[x]$ polinoamele P_1 și Q_1 astfel că

$$e_k = P \cdot P_1 + Q \cdot Q_1$$

și înmulțind această egalitate în ambii membri cu R avem

$$R = P \cdot R \cdot P_1 + Q \cdot R \cdot Q_1.$$

Dar în membrul drept al egalității apare o sumă de doi termeni divizibili fiecare prin P (primul conține P, iar al doilea conține produsul QR care este divizibil prin P prin ipoteză). Atunci suma însăși este divizibilă prin P și prin urmare P divide R.

2. Dacă un polinom $P \in K[x]$ este ireductibil și divide produsul altor două polinoame Q și R din inelul $K[x]$, atunci el divide cel puțin pe unul din factori.

Într-adevăr, polinomul P fiind ireductibil, atunci avem una din alternativele:

— polinomul P divide polinomul Q;

— polinomul P este prim cu Q și atunci, conform consecinței 1, va divide polinomul R.

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Consecința 2 care, în fapt, este un corolar al primei consecințe se poate extinde prin recurență la următorul rezultat:

Dacă P, Q_1, Q_2, ..., Q_n sînt polinoame din inelul $K[x]$, iar P este ireductibil și divide produsul $Q_1 Q_2 \dots Q_n$, atunci el divide cel puțin un factor al produsului.

Demonstrația este imediată prin inducție completă.

Cu ajutorul rezultatelor de mai sus vom pune acum în evidență următoarea

Teoremă fundamentală de descompunere a unui polinom în factori ireductibili. Dacă P este un polinom din inelul $K[x]$, atunci el se poate descompune în mod unic într-un produs de factori ireductibili (abstracție făcînd, eventual, de factori constanți).

Demonstrație. Presupunem prin absurd că polinomul P ar admite două descompuneri în produsele $Q_1Q_2 \dots Q_n$ și $R_1R_2 \dots R_m$, unde $n > 1$, $m > 1$ (dacă $n = m = 1$ înseamnă că însuși P este ireductibil și teorema este demonstrată) și presupunem că $n \geqslant m$. Așadar, avem:

$$P = Q_1Q_2 \dots Q_mQ_{m+1} \dots Q_n = R_1R_2 \dots R_m$$

unde Q_i, $i = 1, 2, \dots, n$ și R_j, $j = 1, 2, \dots, m$ sînt polinoame ireductibile din $K[x]$.

Conform consecinței 2, polinomul Q_1 va divide unul din factorii produsului $R_1R_2 \dots R_m$, fie acesta R_1. Dar R_1 este ireductibil, așa că vom avea

$$Q_1 = k_1 \cdot R_1 \text{ cu } k_1 \in K.$$

Rațiocinînd analog pentru factorii $Q_2, Q_3, \dots, Q_m$ rezultă că avem

$$Q_i = k_i \cdot R_i \text{ cu } k_i \in K, \quad i = 1, 2, \dots,$$

și prin urmare egalitatea admisă inițial ne dă

$$k_1k_2 \dots k_mQ_{m+1} \dots Q_n = e_k$$

de unde rezultă că produsul de polinoame $Q_{m+1}Q_{m+2} \dots Q_n$ are gradul zero adică el se reduce la o constantă, ceea ce impune rezultatul $m = n$. Atunci avem

$$P = Q_1Q_2 \dots Q_m = R_1R_2 \dots R_m$$

cu

$$Q_i = k_iR_i, \; k_i \in K, \; i = 1, 2, \dots, m$$

ceea ce ne arată că cele două descompuneri ale polinomului P conțin (abstracție făcînd de factori constanți) aceiași factori ireductibili.

Scanned with OKEN Scanner

§ 6. CÎTEVA CONSIDERAȚII PRIVIND POLINOAMELE NUMERICE

1. Capitolele următoare ale acestei cărți vor conține numai probleme legate de polinoamele numerice; mulțimile K și X fac parte din $\{N, Z, Q, \mathbf{R}, \mathscr{C}\}$ și obținem familiile de polinoame menționate în obs. 1, § 2; (în cazurile cînd vom considera părți ale lor se vor face precizările necesare). Vom nota cu 0 polinomul nul și cu 1 polinomul unitate.

Dacă P este un element al oricărei astfel de familii de polinoame, funcția polinomială corespunzătoare va fi o funcție numerică. Pentru fiecare din ele vom considera — atunci cînd va fi nevoie — derivata ei acceptînd-o și exprimînd-o formal ca și cînd am avea $X = \mathbf{R}$, chiar dacă, în fapt, vom avea $X = \mathscr{C}$.

2. Dacă f_P este funcția corespunzătoare polinomului

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$$

vom numi *polinomul* P *derivat* polinomul corespunzător funcției f_P; dacă îl notăm P' atunci el este:

$$P'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + (n-2)a_2x^{n-3} + \ldots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}.$$

Acolo unde nu există pericolul vreunei confuzii vom nota cu f și f' cele două funcții.

Observație. Deoarece oricărui polinom numeric:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

îi corespunde o funcție numerică f_P care oricărui număr x îi pune în corespondență numărul rezultat făcînd operațiile, putem utiliza pentru scrierea lui prescurtarea:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^{n-k}.$$

De asemenea, ecuația $f_P(x) = 0$ este ecuația atașată polinomului P. Rădăcinile ei sînt și ale polinomului, și sînt numere.

Scanned with OKEN Scanner

3. Fie acum polinomul:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

din $\mathcal{C}[x]$, $x \in \mathcal{C}$ și considerăm numărul arbitrar ales h. Ne propunem să calculăm valoarea polinomului P în $x + h$.

Deoarece numerele x și h nu depind în nici un fel unul de altul, le vom considera ca două variabile independente și în acest caz vom scrie

$$P(x+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x+h)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{i=0}^{k} C_k^i x^{k-i} h^i \right)$$

de unde se vede că P se poate considera fie ca polinom în x (atunci cînd pentru h fixăm o anumită valoare), fie ca polinom în h (atunci cînd îl fixăm pe x). În acest al doilea caz el capătă forma:

$$Q(h) = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \ldots + A_n h^n$$

unde coeficienții $A_0, A_1, \ldots, A_n$ (care depind de x) pot fi determinați în felul următor.

Luînd $h = 0$ avem $A_0 = Q(0) = P(x)$ și considerînd apoi polinomul derivat Q' precum și următoarele sale derivate pînă la cea de ordinul n, avem

$$Q'(h) = A_1 + 2A_2 \cdot h + 3A_3 h^2 + \ldots + nA_n h^{n-1}$$
$$Q''(h) = 2A_2 + 3 \cdot 2 \cdot A_3 h + \ldots + n(n-1) A_n h^{n-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Q^{(n)}(h) = n! A_n,$$

de unde rezultă:

$$A_1 = Q'(0); \quad A_2 = \frac{Q''(0)}{2!}; \quad A_3 = \frac{Q'''(0)}{3!} \ldots A_n = \frac{Q^{(n)}(0)}{n!}.$$

Dar diferitele derivate ale lui Q nu sînt altceva decît derivatele lui P în raport cu h, încît putem scrie că:

$$A_k = \frac{P^{(k)}(x)}{n!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Prin urmare:

$$P(x+h) = P(x) + \frac{P'(x)}{1} h + \frac{P''(x)}{2!} h^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(x)}{n!} h^n,$$

care reprezintă *formula lui Taylor* pentru polinoame.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă înlocuim $y = x + h$ această formulă devine:

$$P(y) = P(x) + \frac{P'(x)}{1}(y - x) + \frac{P''(x)}{2!}(y - x)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(x)}{n!}(y - x)^n$$

și fixînd o valoare x_0 pentru x, atunci, notînd din nou nedeterminata cu x, avem:

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1}(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

iar aceasta reprezintă dezvoltarea lui P după puterile lui $x - x_0$.

Dacă, în particular, considerăm $x_0 = 0$ atunci avem:

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

care reprezintă *formula lui Mac Laurin* pentru polinoame.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul II

INELUL DE POLINOAME $\mathcal{C}[x]$

Pentru polinoamele care aparțin inelului $\mathcal{C}[x]$, $x \in \mathcal{C}$ cunoaștem deja o seamă de proprietăți expuse în cadrul problematicii care privește inelele de polinoame oarecare, cu referiri la inelele de polinoame numerice. Apar însă și o seamă de aspecte noi pe care le prezentăm în cele ce urmează.

Să facem mai întîi mențiunea că, dacă $P \in \mathcal{C}[x]$ este

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,\ n \geqslant 1,$$

atunci funcția polinomială corespunzătoare lui este

$$f_P : \mathcal{C} \to \mathcal{C};\ f_P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

§ 1. PROPRIETĂȚI

1. Dacă $a_n = 0$, atunci oricare ar fi numărul $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta (0 < \delta < 1)$ astfel încît să avem $|f_P(x)| < \varepsilon$ pentru orice număr x care satisface condiția $|x| < \delta$.

Demonstrație. Deoarece $f_P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{n-k}$ rezultă că

$$|f_P(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{n-k}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k x^{n-k}| = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \cdot |x|^{n-k}$$

sau

$$|f_P(x)| \leqslant \operatorname*{Max}_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \{|a_k|\} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |x|^{n-k}$$

și cum

$$\sum_{k=0}^{n-1} |x|^{n-k} = \frac{|x| - |x|^{n+1}}{1 - |x|}$$

Scanned with OKEN Scanner

(fiind vorba despre suma termenilor unei progresii geometrice) dacă notăm $M = \underset{0 \leqslant k \leqslant n-1}{\text{Max}} \{|a_k|\}$ și ținem seama că pentru $|x| < 1$, vom avea

$$|f_P(x)| \leqslant M \frac{|x| - |x|^{n+1}}{1 - |x|} < M \frac{|x|}{1 - |x|}.$$

Deoarece condiția $|f_P(x)| < \varepsilon$ este satisfăcută dacă luăm

$$M \frac{|x|}{1 - |x|} < \varepsilon$$

rezultă că, în fapt, trebuie să avem

$$\frac{|x|}{1 - |x|} < \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{adică} \quad |x| < \frac{\varepsilon}{M + \varepsilon}.$$

Atunci, numărul δ a cărui existență vrem s-o punem în evidență este

$$\delta = \frac{\varepsilon}{M + \varepsilon} \quad \text{și se vede că} \quad 0 < \delta < 1.$$

Proprietatea demonstrată ne ajută să dăm următoarea

Consecință. Fie $P \in \mathcal{C}[x]$ și $x_0 \in \mathcal{C}$ fixat. Atunci, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $0 < \delta < 1$ astfel încît pentru orice $h \in \mathcal{C}$ cu $|h| < \delta$ avem

$$|f_P(x_0 + h) - f_P(x_0)| < \varepsilon.$$

Într-adevăr, considerînd polinomul

$$Q(h) = P(x_0 + h) - P(x_0)$$

se vede că $Q(0) = 0$ și prin urmare polinomul Q este de forma

$$Q(h) = hQ_1(h).$$

Atunci, în scrierea polinomului Q, termenul său liber este nul. Consecința rezultă aplicînd funcției polinomiale corespunzătoare polinomului Q, proprietatea 1.

Dacă $f_P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, cele două rezultate se pot exprima sub forma: $\lim_{x \to 0} f_P(x) = 0$; funcțiile polinomiale sînt continui.

Intuitiv, această consecință exprimă faptul că funcția f_P se bucură de proprietatea că, dacă $x_0 \in \mathcal{C}$ este un număr fixat atunci, numărul

$$f_P(x_0 + h) - f_P(x_0)|$$

poate fi oricît de mic, dacă $|h|$ este suficient de mic.

Scanned with OKEN Scanner

2. *Oricare ar fi un număr pozitiv* M, *există numărul pozitiv* N *astfel că, dacă* $|x| > N$, *atunci* $|f_P(x)| > M$.

Demonstrație. Să observăm mai întîi că avem

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k x^{n-k}\right| \leqslant \operatorname*{Max}_{1\leqslant k\leqslant n}\{|a_k|\} \cdot \sum_{k=1}^{n} |x|^{n-k}$$

de unde, considerînd $|x| > 1$ și notînd $M_1 = \operatorname*{Max}_{1\leqslant k\leqslant n}\{|a_k|\}$ avem

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k x^{n-k}\right| \leqslant M_1 \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1} < M_1 \frac{|x|^n}{|x| - 1}.$$

Atunci, rezultă, conform unei proprietăți cunoscute a modulului că

$$|f_P(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}\right| = \left|a_0 x^n + \sum_{k=1}^{n} a_k x^{n-k}\right| \geqslant$$

$$\geqslant |a_0 x^n| - \left|\sum_{k=1}^{n} a_k x^{n-k}\right|$$

iar, în baza celor de mai înainte, vom avea

$$|f_P(x)| \geqslant |a_0| \cdot |x|^n - M_1 \frac{|x|^n}{|x| - 1}.$$

Arătăm acum că se poate alege un număr M_2 astfel încît să avem

$$|a_0| \cdot |x|^n - M_1 \frac{|x|^n}{|x| - 1} > M_2 \cdot |x|^n.$$

Într-adevăr, aceasta implică

$$|a_0| - \frac{M_1}{|x| - 1} > M_2 \quad \text{de unde} \quad |x| > 1 + \frac{M_1}{|a_0| - M_2}.$$

condiție evident satisfăcută, deoarece prin ipoteză $|x|$ este suficient de mare.

Atunci, condiția $|f_P(x)| > M$ va fi satisfăcută dacă

$$M_2 \cdot |x|^n > M \quad \text{ceea ce revine la} \quad |x| > \sqrt[n]{\frac{M}{M_2}}.$$

Va trebui deci să luăm

$$N = \operatorname{Max}\left\{1 + \frac{M_1}{|a_0| - M_2};\ \sqrt[n]{\frac{M}{M_2}}\right\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Intuitiv, proprietatea 2 ne spune, că numărul $|f_P(x)|$ poate fi oricît de mare, dacă numărul $|x|$ este suficient de mare. Dacă $f_P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ aceasta înseamnă că $\lim |f_P(x)| = \infty$.

3. *Teorema fundamentală a algebrei*

Orice polinom din inelul $\mathcal{C}[x]$ care are gradul mai mare ca zero are cel puțin o rădăcină complexă.

Pentru a demonstra teorema vom dovedi mai întîi următoarea

Lemă. Dacă $x = x_0 \in \mathcal{C}$ este un număr care nu anulează funcția f_P, atunci există un număr $h \in \mathcal{C}$ astfel încît să avem

$$|f_P(x_0 + h)| < |f_P(x_0)|.$$

Fie dezvoltarea *Taylor* în $x = x_0$

$$f_P(x_0 + h) = f_P(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f_P^{(k)}(x_0) \frac{h^k}{k!}$$

din care, în virtutea ipotezei $f_P(x_0) \neq 0$, avem

$$\frac{f_P(x_0 + h)}{f_P(x_0)} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{f_P^{(k)}(x_0)}{f_P(x_0)} \cdot \frac{h^k}{k!}.$$

Deoarece numărul $x = x_0$ ar putea să anuleze unele din derivatele $f_P^{(k)}$ (nu le poate anula pe toate, deoarece se vede că $f_P^{(n)}(x) = a_0 \cdot n! \neq 0$), considerăm $k = q$ ordinul cel mai mic al derivatei care nu se anulează în $x = x_0$. Rezultă că putem scrie

$$\frac{f_P(x_0 + h)}{f_P(x_0)} = 1 + \sum_{k=q}^{n} \frac{f_P^{(k)}(x_0)}{f_P(x_0)} \cdot \frac{h^k}{k!}$$

sau

$$\frac{f_P(x_0 + h)}{f_P(x_0)} = 1 + b_q h^q + \sum_{k=q+1}^{n} b_k h^k \text{ notînd } b_k = \frac{f_P^{(k)}(x_0)}{k! f_P(x_0)}.$$

Vom putea deci să scriem

$$\left|\frac{f_P(x_0 + h)}{f_P(x_0)}\right| \leqslant |1 + b_q h^q| + \left|\sum_{k=q+1}^{n} b_k h^k\right|$$

și cum $f_P^{(q)}(x_0) \neq 0$ rezultă că $b_q \neq 0$ și prin urmare avem

$$\left|\sum_{k=q+1}^{n} b_k h^k\right| = \left|b_q h^q \cdot \sum_{k=1}^{n-q} \frac{b_{q+k}}{b_q} \cdot h^k\right| = |b_q h^q| \cdot \left|\sum_{k=1}^{n-q} \frac{b_{q+k}}{b_q}\right|.$$

Scanned with OKEN Scanner

Așadar

$$\left|\frac{f_P(x_0+h)}{f_P(x_0)}\right| \leqslant |1+b_q h^q| + |b_q h^q| \cdot \left|\sum_{k=1}^{n-q} \frac{b_{q+k}}{b_q} \cdot k^k\right|.$$

Numerele b_q și h fiind complexe, numărul $b_q h^q$ va fi tot complex deci de forma

$$b_q h^q = |b_q h^q| \cdot (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

unde

$$\alpha = \arg(b_q h)^q = \arg b_q + q \cdot \arg h$$

și se vede că dacă luăm $\alpha = \pi$ obținem $b_q h^q = -|b_q h^q|$.

Aceasta înseamnă că, dacă alegem numărul $h \in \mathcal{C}$ astfel ca argumentul său să satisfacă condiția

$$\arg h = \frac{\pi - \arg b_q}{q}$$

atunci numărul $b_q h^q$ este real negativ.

Rezultă că

$$|1 + b_q h^q| = |1 - |b_q h^q||.$$

Să mai observăm că, potrivit proprietății 1, numărul

$$\left|\sum_{k=1}^{n-q} \frac{b_{q+k}}{b_q} h^k\right|$$

poate fi făcut oricît de mic dacă $|h|$ este suficient de mic; în particular există numărul δ_1 astfel că, dacă $|h| < \delta_1$, atunci

$$\left|\sum_{k=1}^{n-q} \frac{b_{q+k}}{b_q} h^k\right| < \frac{1}{2}$$

și prin urmare

$$\left|\frac{f_P(x_0+h)}{f_P(x_0)}\right| < |1 - |b_q h^q|| + \frac{1}{2}|b_q h^q|.$$

Din mulțimea numerelor $h \in \mathcal{C}$ care satisfac cerințele impuse anterior, adică

$$\arg h = \frac{\pi - \arg b_q}{q}; \quad |h| < \delta_1$$

Scanned with OKEN Scanner

le vom alege în continuare pe cele pentru care $|b_q h^q| < 1$, adică pe cele pentru care, în plus, este satisfăcută și condiția

$$|h| < \frac{1}{\sqrt[q]{|b_q|}}$$

ceea ce face ca

$$|1 - |b_q h^q|| + \frac{1}{2}|b_q h^q| = 1 - |b_q h^q| + \frac{1}{2}|b_q h^q| =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}|b_q h^q| < 1.$$

În consecință, dacă numărul $h \in \mathcal{C}$ este astfel că

$$\arg h = \frac{\pi - \arg b_q}{q}; \quad |h| < \min\left\{\delta_1, \frac{1}{\sqrt[q]{|b_q|}}\right\}$$

avem

$$\left|\frac{f_P(x_0 + h)}{f_P(x_0)}\right| < 1$$

tocmai afirmația din lemă.

Pentru demonstrarea teoremei vom folosi lema anterioară, precum și următorul rezultat privitor la funcțiile de două variabile (rezultat analog unei proprietăți cunoscute a funcțiilor reale de o variabilă reală și continue): *o funcție definită și continuă pe o mulțime de puncte din plan închisă și mărginită, își atinge marginile pe aceasta.*

Reluăm funcția polinomială

$f_P : D \subset \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ unde D este domeniul plan mărginit de un cerc C cu centrul în origine și de rază arbitrară suficient de mare astfel încît să avem $|f_P(x)| > |a_n|$ pentru toate punctele $x \subset C$, lucru posibil datorită proprietății 2); notăm $x = u + iv$; $a_k = \alpha_k + \beta_k i$.

Atunci

$$f_P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k + i\beta_k)(u + iv)^{n-k}$$

ceea ce se poate scrie sub forma $f_P(x) = p(u, v) + iq(u, v)$ unde p și q sînt funcții reale de două variabile reale, continue și prin urmare

$$|f_P(x)| = \sqrt{p^2(u, v) + q^2(u, v)}$$

care, de asemenea, este o funcție reală de două variabile reale, continuă pe D.

Scanned with OKEN Scanner

Conform rezultatului menționat această funcție are un minim absolut în acest domeniu pe care îl atinge într-un punct pe care îl notăm x_1. Acest punct este interior lui D, deoarece fiind un punct de minim avem

$$|f_P(x_1)| \leqslant |f_P(0)| = |a_n|$$

și prin modul cum am ales domeniul D, inegalitatea contrară este valabilă numai pentru punctele de pe cercul C.

Afirmăm acum că $f_P(x_1) = 0$. Într-adevăr, dacă presupunem $f_P(x_1) \neq 0$ atunci, conform lemei, există $h \in \mathcal{C}$ astfel încît $x + h \in D$ și

$$|f_P(x_1 + h)| < |f_P(x_1)|$$

ceea ce contrazice faptul că x_1 este punctul în care f_P își atinge minimul. Cu aceasta teorema este demonstrată.

Consecințe. 1. Un polinom $P \in \mathcal{C}[x]$ de gradul n are n rădăcini. Într-adevăr, conform teoremei fundamentale a algebrei, polinomul P are o rădăcină pe care o notăm x_1. Atunci el este divizibil prin factorul linear $x - x_1$, deci există un polinom $P_1 \in \mathcal{C}[x]$ de gradul $n - 1$ astfel că putem scrie

$$P(x) = (x - x_1) \cdot P_1(x).$$

Deoarece polinomul P_1 face parte din inelul $\mathcal{C}[x]$, i se poate aplica aceeași teoremă și prin urmare, dacă notăm cu x_2 rădăcina lui, există $P_2 \in \mathcal{C}[x]$ un polinom de gradul $n - 2$ astfel încît

$$P_1(x) = (x - x_2) \cdot P_2(x) \quad \text{și deci}$$

$$P(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot P_2(x).$$

Prin recurență, aplicînd fiecărui nou polinom P_k, $k = 2, 3, \ldots$ teorema fundamentală ajungem finalmente la un polinom $P_{n-1} \in \mathcal{C}[x]$ de gradul întîi, care are rădăcina x_n și care se va scrie sub forma

$$P_{n-1}(x) = a(x - x_n); \qquad a \in \mathcal{C}.$$

Deci

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

și are rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Desigur, unele dintre acestea pot fi egale între ele (rădăcini multiple) și deci cea mai gene-

Scanned with OKEN Scanner

rală formă de scriere a polinomului P descompus în factori liniare este

$$P(x) = a(x - x_1)^{p_1}(x - x_2)^{p_2} \dots (x - x_m)^{p_m}, \quad p_k \in N^*, \quad k = 1, 2 \dots m$$

numerele $p_1, p_2, \dots, p_m$ fiind ordinele de multiplicitate ale rădăcinilor distincte $x_1, x_2, \dots, x_m$ respectiv, deci verificînd egalitatea

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = n.$$

2. Să presupunem că polinomul $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ are rădăcinile $x_1, x_2, \dots, x_n$. Atunci din identitatea

$$P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) =$$
$$= a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

rezultă următoarele relații între rădăcinile polinomului și coeficienții săi

$$\Sigma x_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$\Sigma x_1x_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0}$$

$$\Sigma x_1x_2x_3 = x_1x_2x_3 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_3}{a_0}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Sigma x_1x_2 \dots x_{n-1} = x_1x_2 \dots x_{n-1} + \dots + x_2x_3 \dots x_n =$$
$$= (-1)^{n-1}\frac{a_{n-1}}{a_0}\, x_1x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

cunoscute sub numele de *formulele lui Viète.*

3. Fie P și Q două polinoame și presupunem că P se divide prin Q. Atunci există un polinom C astfel că $P = C \cdot Q$. Să mai presupunem că $x = a$ este o rădăcină a polinomului Q. Înseamnă că acesta este divizibil prin $x - a$ și prin urmare putem scrie

$$Q(x) = (x - a)\, Q_1(x) \quad \text{deci} \quad P(x) = (x - a)Q_1(x)\, C(x).$$

Cum factorul $x - a$ fiind de gradul întîi este ireductibil deducem că el apare ca unul din factorii ireductibili în care s-ar putea descompune polinomul P. Atunci el este un divizor al acestuia și în consecință $x = a$ este o rădăcină și a polino-

Scanned with OKEN Scanner

mului P. Rezultă că, *dacă un polinom* P *este divizibil printr-un polinom* Q, *atunci orice rădăcină a lui* Q *este rădăcină și a lui* P.

Reciproc, să presupunem că oricare ar fi o rădăcină $x = a$ a polinomului Q, aceasta este rădăcină și a polinomului P. Atunci $x - a$, care este un factor prim al lui Q, va fi un factor prim și al polinomului P. Prin urmare toți factorii liniari din descompunerea polinomului Q vor apărea și în descompunerea lui P. Dacă $x = a$ este o rădăcină multiplă de ordinul k a polinomului Q, atunci acesta va fi divizibil prin $(x - a)^k$. Înseamnă că polinomul P, spre a fi divizibil prin Q, va trebui să fie și el divizibil prin $(x - a)^k$ deci să aibă pe $x = a$ rădăcină multiplă de ordinul $p \geqslant k$.

Am demonstrat astfel o proprietate de foarte mare utilitate și anume că, *dacă* P *și* Q *sînt două polinoame numerice atunci polinomul* P *este divizibil prin polinomul* Q *dacă și numai dacă orice rădăcină a polinomului* Q *este rădăcină și a polinomului* P *avînd și pentru acesta un ordin de multiplicitate cel puțin egal cu cel pe care îl are pentru polinomul* Q.

4. Să considerăm din nou două polinoame numerice P și Q și să presupunem că ele au rădăcina comună $x = a$ (simplă sau multiplă de ordinul $k > 1$). Atunci fiecare din ele este divizibil prin $(x - a)^k$, $k = 1, 2, \ldots$, deci factorul $(x - a)^k$ este un divizor comun al celor două polinoame. Atunci factorul $(x - a)^k$ este un divizor al polinomului (P,Q) = c.m.m.d.c. al polinoamelor P și Q, deci $x = a$ va fi o rădăcină (simplă sau de același ordin de multiplicitate k) a acestuia. Deoarece se poate arăta cu ușurință că și reciproca acestui rezultat este valabilă (orice rădăcină a polinomului (P, Q) este rădăcină comună a polinoamelor P și Q cu același ordin de multiplicitate ca și pentru polinomul (P, Q)) rezultă următoarea proprietate foarte importantă în aplicații: *rădăcinile comune a două polinoame sînt rădăcinile celui mai mare divizor comun al lor* (cu ordinele de multiplicitate respective).

Rădăcinile comune a două polinoame numerice se mai pot stabili și prin procedeul pe care-l expunem în continuare.

Fie polinoamele numerice P, Q:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$
$$Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$$

despre care vom presupune că au rădăcinile:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ respectiv } x_1', x_2', \ldots, x_m'.$$

Scanned with OKEN Scanner

(Vom admite că $n \geqslant m$ ceea ce, după cum se va vedea, nu este restrictiv.) Atunci, vom putea scrie:

$$P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = a_0 \cdot \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

$$Q(x) = b_0(x - x_1')(x - x_2') \ldots (x_m') = b_0 \cdot \prod_{j=1}^{m} (x - x_j').$$

Să considerăm acum expresiile:

$$A = \prod_{j=1}^{m} P(x_j'), \quad B = \prod_{i=1}^{n} Q(x_i)$$

în legătură cu care vom face cîteva observații.

a) Deoarece:

$$A = \prod_{j=1}^{m} P(x_j') = \prod_{j=1}^{m} a_0 \prod_{i=1}^{m} (x_j' - x_i) = a_0^m \prod_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} (x_j' - x_i)$$

$$B = \prod_{i=1}^{n} Q(x_i) = \prod_{1}^{m} b_0 \prod_{j=1}^{m} (x_i - x_j') = b_0^n \prod_{j=1}^{m} \prod_{j=1}^{m} (x_i - x_j')$$

se vede că:

$$\prod_{j=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} (x_j' - x_i) = \pm \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (x_i - x_j')$$

așa că:

$$\frac{A}{a_0^m} = \frac{B}{b_0^n} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} |x_i - x_j'|.$$

b) Dacă cele două polinoame P și Q au o rădăcină comună atunci $A = B = 0$, pentrucă în acest caz există un anumit i și un anumit j pentru care $x_i - x_j' = 0$. Această observație ne arată că dacă se ia în considerație expresia

$$R(P, Q) = a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (x_i - x_j')$$

atunci, *condiția necesară și suficientă ca polinoamele* P *și* Q *să aibă rădăcini comune este ca* $R(P, Q) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Că această condiție este necesară s-a văzut, iar suficiența ei rezultă din faptul că implicația

$$R(P, Q) = 0 \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (x_i - x'_j) = 0$$

impune existența unui i și a unui j (cel puțin) astfel că $x_i = x'_j$.

Expresia $R(P, Q)$ se numește *rezultant al polinoamelor* P *și* Q și se vede că el este un polinom de coeficienții a_i $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ și b_j $(j = 0, 1, 2, ..., m)$ ai celor două polinoame P și Q.

De asemenea, se vede că

$$R(P, Q) = (-1)^{mn} R(Q, P).$$

Pentru a stabili un mod de calculare a realizantului să reluăm cele două polinoame P și Q și să presupunem că ele au rădăcini comune. Vom studia mai multe situații și anume.

A. *Polinoamele* P *și* Q *au o singură rădăcină comună.* Fie aceasta $x = x_1$, în acest caz putem scrie

$$P(x) = (x - x_1) \cdot P_1(x) \text{ cu grad } P_1 = n - 1$$

$$Q(x) = (x - x_1) \cdot Q_1(x) \text{ cu grad } Q_1 = m - 1$$

de unde rezultă că

$$P(x) \cdot Q_1(x) - P_1(x) \cdot Q(x) = 0.$$

Așadar, putem afirma că o condiție necesară ca polinoamele P (de gradul n) și Q (de gradul m) să aibă o rădăcină comună este ca să existe două polinoame P_1 (de gradul $n-1$) și Q_1 (de gradul $m - 1$) astfel ca

$$P(x) \cdot Q_1(x) = P_1(x) \cdot Q(x).$$

Demonstrăm că această condiție este și suficientă.

Într-adevăr, fie x_k $(k = 1, 2, ..., n)$ rădăcinile polinomului P. Atunci,

$$P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) ... (x - x_n)$$

și conform egalității date vom avea

$$P_1(x) \cdot Q(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) ... (x - x_n) \cdot Q_1(x).$$

Cum polinomul P_1 are gradul $n - 1$ rezultă că dintre factorii liniari $x - x_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$ cel puțin unul va divide polinomul $Q(x)$. Există deci cel puțin un factor liniar, fie acesta $x - p$ (p fiind unul din numerele x_k, $k = 1, 2, ..., n$) care

Scanned with OKEN Scanner

divide atît polinomul P cît și polinomul Q. Atunci $x = p$ este rădăcină comună a celor două polinoame.

Am obținut deci o condiție necesară și suficientă pentru ca polinoamele P (de gradul n) și Q (de gradul m) să aibă o rădăcină comună. Dacă mai observăm că în cazul cînd polinoamele P și Q au un factor comun de grad mai mare ca unu, din condiția

$$P(x) \cdot Q_1(x) - P_1(x) \cdot Q(x) = 0$$

rezultă că gradele polinoamelor P_1 și Q_1 pot fi mai mici decît $n - 1$ respectiv $m - 1$.

În felul acesta condiția căutată se dă sub forma următoarei teoreme cunoscută sub numele de

Teorema lui Euler

Dîndu-se polinoamele P (de gradul n) și Q (de gradul m) ele au o rădăcină comună dacă și numai dacă există două polinoame P_1 (grad $P_1 \leqslant n - 1$) și Q_1 (grad $Q_1 \leqslant m - 1$) astfel că

$$P(x) \cdot Q_1(x) - P_1(x) \cdot Q(x) = 0.$$

Vom căuta acum să obținem din aceasta o condiție pe care trebuie să o satisfacă coeficienții polinoamelor date P și Q. Să presupunem pentru aceasta că

$$P_1(x) = \alpha_0 x^{n-1} + \alpha_1 x^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-2} x + \alpha_{n-1}$$
$$Q_1(x) = \beta_0 x^{m-1} + \beta_1 x^{m-2} + \ldots + \beta_{m-2} x + \beta_{m-1}.$$

Atunci condiția din teoremă se va scrie

$$(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n)(\beta_0 x^{m-1} + \beta_1 x^{m-2} + \beta_2 x^{m-3} + \ldots + \beta_{m-2} x + \beta_{m-1}) - (\alpha_0 x^{n-1} + \alpha_1 x^{n-2} + \alpha_3 x^{n-3} + \ldots + \alpha_{n-2} x + \alpha_{n-1}) \cdot (b_0 x^m + v_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} x + b_m) = 0$$

ceea ce înseamnă că

$$(a_0\beta_0 - \alpha_0 b_0) x^{n+m-1} + (a_1\beta_0 + a_0\beta_1 - \alpha_0 b_1 - \alpha_1 b_0) x^{n+m-2} + (a_0\beta_0 + a_1\beta_1 + a_0\beta_2 - \alpha_0 b_2 - \alpha_1 b_1 - \alpha_2 b_0) x^{n+m-3} + \ldots + (a_n\beta_0 + a_{n-1}\beta_1 + \ldots + a_{n-m+1}\beta_{m-1} - \alpha_{n-1} b_1 - \alpha_{n-2} b_2 - \ldots - \alpha_{n-m} b_m) x^{m-1} + (a_n\beta_1 + a_{n-1}\beta_2 + \ldots + a_{n-m+2}\beta_{m-1} - \alpha_{n-1} b_2 - \alpha_{n-2} b_3 - \ldots - \alpha_{n-m+1} b_m) x^{m-2} + \ldots + (a_n\beta_{m-2} + a_{n-1}\beta_{m-1} - \alpha_{n-2} b_n - \alpha_{n-1} b_{m-1}) x + (a_n\beta_{m-1} - \alpha_{n-1} b_m) = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

și cum această egalitate trebuie să fie valabilă oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$ (în fapt ea este o identitate), rezultă că trebuie să avem

$$a_0\beta_0 - b_0\alpha_0 = 0$$
$$a_1\beta_0 + a_0\beta_1 - b_1\alpha_0 - b_0\alpha_1 = 0$$
$$a_2\beta_0 + a_1\beta_1 + a_0\beta_2 - b_2\alpha_0 - b_1\alpha_1 - b_0\alpha_2 = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n\beta_0 + a_{n-1}\beta_1 + \dots + a_{n-m+1}\beta_{m-1} - b_1\alpha_{n-1} - b_2\alpha_{n-2} - \dots - b_m\alpha_{n-m} = 0$$
$$a_n\beta_1 + a_{n-1}\beta_2 + \dots + a_{n-m+2}\beta_{m-1} - b_2\alpha_{n-1} - b_3\alpha_{n-2} - \dots - b_m\alpha_{n-m+1} = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n\beta_{m-2} + a_{n-1}\beta_{m-1} - b_m\alpha_{n-2} - b_{m-1}\alpha_{n-1} = 0$$
$$a_n\beta_{m-1} - b_m\alpha_{n-1} = 0.$$

Aceste $m + n$ egalități reprezintă, în fapt, un sistem omogen de $m + n$ ecuații de gradul I cu $m + n$ necunoscute, acestea fiind $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}$. Deoarece polinoamele P_1 și Q_1 nu pot fi identic nule înseamnă că sistemul de mai sus trebuie să admită cel puțin o soluție diferită de cea banală, ceea ce pentru un astfel de sistem echivalează cu condiția ca determinantul coeficienților necunoscutelor să fie nul. Deci dacă notăm

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 & -b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 & -b_1 & -b_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & \dots & 0 & -b_2 & -b_1 & -b_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & -b_m & -b_{m-1} & -b_{m-2} & \dots & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_{n-m+1} & 0 & -b_m & -b_{m-1} & \dots & -b_{n-m} \\ 0 & a_n & \dots & a_{n-m+2} & 0 & 0 & -b_m & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-m+3} & 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & -b_m \end{vmatrix}$$

(m linii; n linii)

cele m coloane ale coeficienților necunoscutelor $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m-1}$

cele n coloane ale coeficienților necunoscutelor $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$

Scanned with OKEN Scanner

va trebui să avem $D = 0$. Dar se vede ușor că determinantul D se mai poate scrie și sub forma

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{m-1} & b_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{m-2} & b_{m-1} & b_m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_0 & \dots & b_m \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \} n \text{ linii} \\ \\ \\ \\ \} m \text{ linii} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Acesta se numește un *determinant Sylvester* și prin urmare polinoamele P și Q au o rădăcină comună dacă și numai dacă determinantul *Sylvester* al coeficienților lor este nul.

Exemple

1) Polinoamele:

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 3x - 1$$
$$Q(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 2$$

au determinantul *Sylvester* cu $3 + 4 = 7$ linii

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -5 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 6 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

După calcul găsim $D = 0$, deci P și Q au o rădăcină comună.

2) Fie $P(x) = x^3 + x - 2$; $Q(x) = x^2 - x - 2$.

Avem

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -32$$

deci cele două polinoame nu au rădăcini comune.

Scanned with OKEN Scanner

B. *Polinoamele* P *și* Q *au două rădăcini comune.* Dacă cele două rădăcini sînt $x = x_1$, $x = x_2$, vom avea

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot P_2(x)$$
$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot Q_2(x)$$

unde P_2 și Q_2 sînt polinoame de gradul $n - 2$, respectiv $m - 2$.

De aici rezultă că

$$P(x) \cdot Q_2(x) - P_2(x) \cdot Q(x) = 0$$

care apare drept o condiție necesară ca P și Q să aibă două rădăcini comune.

Reciproc, presupunem că există polinoamele P_2 (de grad $n - 2$) și Q_2 (de grad $m - 2$) astfel că

$$P(x) \cdot Q_2(x) - P_2(x) \cdot Q(x) = 0.$$

Dacă x_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) sînt rădăcinile polinomului P atunci vom avea

$$P_2(x) \cdot Q(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2 \ldots (x - x_n) \cdot Q_2(x)$$

și cum P_2 are gradul $n - 2$ rezultă că cel puțin doi dintre factorii $x - x_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) vor divide polinomul $Q(x)$. Dacă acești factori sînt $x - p$ și $x - q$ atunci $x = p$, $x = q$ sînt rădăcini comune pentru P și Q.

Din nou facem observația că dacă P și Q au vreun factor comun de grad mai mare ca 2 atunci polinoamele P_2 și Q_2 pot avea gradele mai mici decît $n - 2$, respectiv $m - 2$.

În felul acesta putem spune că, *polinoamele* P *(de gradul* n*) și* Q *(de gradul* m*) au două rădăcini comune, dacă și numai dacă există două polinoame* P_2 *(grad* $P_2 \leqslant n - 2$*) și* Q_2 *(grad* $Q_2 \leqslant m - 2$*) astfel că*

$$P(x) \cdot Q_2(x) - P_2(x) \cdot Q(x) = 0.$$

Considerînd acum

$$P_2(x) = \alpha_0 x^{n-2} + \alpha_1 x^{n-3} + \ldots + \alpha_{n-3}x + \alpha_{n-2}$$
$$Q_2(x) = \beta_0 x^{m-2} + \beta_1 x^{m-3} + \ldots + \beta_{m-3}x + \beta_{m-2}$$

condiția de mai sus devine

$$(a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n) \cdot (\beta_0x^{m-2} + \beta_1x^{m-3} + \ldots + \beta_{m-3}x + \beta_{m-2}) - (\alpha_0x^{n-2} + \alpha_1x^{n-3} + \ldots + \alpha_{n-3}x + \alpha_{n-2}) \cdot (b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{m-1}x + b_m) = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

sau

$$(a_0\beta_0 - b_0\alpha_0)x^{n+m-2} + (a_0\beta_1 + a_1\beta_0 - \alpha_0 b_1 - \alpha_1 b_0)x^{n+m-3} + \\ + \ldots + (a_{n-1}\beta_{m-2} + a_n\beta_{m-3} - \alpha_{n-3}b_m - \alpha_{n-2}b_{m-1})x + \\ + (a_n\beta_{m-2} - \alpha_{n-2}b_m) = 0$$

de unde

$$\begin{aligned} &a_0\beta_0 - b_0\alpha_0 = 0 \\ &a_0\beta_1 + a_1\beta_0 - \alpha_0 b_1 - \alpha_1 b_0 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n-1}\beta_{m-2} + a_n\beta_{m-3} - \alpha_{n-3}b_m - \alpha_{n-2}b_{m-1} = 0 \\ &a_n\beta_{m-2} - \alpha_{n-2}b_m = 0 \end{aligned}$$

sistem de $n + m - 2$ ecuații, cu $n + m - 2$ necunoscute $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-2})$.

Primele $n + m - 2$ ecuații vor forma un sistem liniar omogen, pentru care, punînd condiția ca să aibă soluții nebanale (determinantul coeficienților să fie nul), obținem

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & & a_n & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & & a_{n-1} & a_n & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & a_0 & & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_0 & b_1 & b_2 \ldots b_m & 0 \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & b_0 & b_1 \ldots b_{n-1} & b_m \ldots 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \begin{matrix} \} m-1 \text{ linii} \\ = 0 \\ \} n-1 \text{ linii} \end{matrix}$$

Acesta este un determinant de ordinul $n + m - 2$ asemănător determinantului *Sylvester* al coeficienților polinoamelor P și Q și se obține din acesta suprimînd liniile a m-a și a $n + m$-a (deci ultima linie cu coeficienți din P și ultima linie cu coeficienți din Q), precum și ultimele două coloane.

Pe lîngă această condiție mai apare însă

$$a_n\beta_{m-2} - \alpha_{n-2}b_m = 0$$

(ultima ecuație din sistem) care, dovedim că implică faptul ca determinantul *Sylvester* al coeficienților polinoamelor P și Q să fie nul și reciproc.

Într-adevăr, dacă

$$a_n\beta_{m-2} - \alpha_{n-2}b_m \neq 0$$

atunci, deoarece în polinomul

$$P(x) \cdot Q_2(x) - P_2(x) \cdot Q(x)$$

Scanned with OKEN Scanner

toți coeficienții cu excepția termenului liber care este $a_n\beta_{m-2} - \alpha_{n-2}b_m$ sînt nuli și prin urmare

$$P(x) \cdot Q_2(x) - P_2(x) \cdot Q(x) = a_n\beta_{m-2} - \alpha_{n-2}b_m \neq 0$$

ceea ce, evident, este absurd deoarece polinomul din stînga are gradul cel puțin doi, P și Q fiind divizibile prin $(x-p)$ $(x-q)$, în timp ce membrul drept fiind o constantă are gradul zero.

Reciproc, dacă

$$a_n\beta_{m-2} - \alpha_{n-2}b_m = 0$$

atunci

$$P(x) \cdot Q_2(x) - P_2(x) \cdot Q(x) = 0$$

ceea ce înseamnă că P și Q au cel puțin o rădăcină comună. Dar aceasta înseamnă că determinantul *Sylvester* al coeficienților polinoamelor P și Q este nul.

Conchidem că polinoamele P și Q au două rădăcini comune dacă determinanții D și D_1 sînt nuli.

Exemplu

Fie

$$P(x) = x^4 - x^3 - x^3 - x - 2,$$
$$Q(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6.$$

Avem

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -5 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -5 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -5 & -6 \end{vmatrix}$$

care după calcul ne dă $D = 0$.

Determinantul D_1 se obține din D suprimînd liniile a 3-a și a 7-a precum și ultimele două coloane

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

Scanned with OKEN Scanner

După calcul obținem $D_1 = 0$. Așadar, P și Q au două rădăcini comune.

Legătura dintre rezultantul $R(P, Q)$ și determinantul *Sylvester* D se stabilește ușor dacă ținem seamă că

$R(P, Q) = 0 \Rightarrow P$ și Q au rădăcini comune $\Rightarrow D = 0$ și reciproc.

Atunci R și D diferă între ele printr-un factor care nu depinde de coeficienții celor două polinoame P și Q.

Deci $R(P, Q) = K \cdot D$.

Dar

$$R(P, Q) = a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (x_i - x_j'),$$

iar în dezvoltarea determinantului D unul din termeni este cel obținut prin produsul elementelor de pe diagonala principală, iar acesta conține a_0^m. Așadar, $k = 1$ și prin urmare

$$R(P, Q) = D.$$

Modul cum am rezolvat problema condițiilor în care două polinoame au două rădăcini comune, ne sugerează deja felul cum putem obține condițiile ca ele să aibă trei rădăcini comune ș.a.m.d. Nu mai demonstrăm aceasta și vom ilustra cele afirmate printr-un exemplu

Fie

$$P(x) = x^4 - 4x^2 + 4,$$

$$Q(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6.$$

Avem

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ 1 & -5 & 5 & 5 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 5 & 5 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 5 & 5 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 & 5 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru calculul determinantului D_1 vom suprima liniile a 4-a și ultima, precum și ultimele două coloane. Obținem

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & -5 & 5 & 5 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 5 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Calculăm acum determinantul D_2 pe care-l obținem din D_1 suprimîndu-i liniile a 3-a și ultima, precum și ultimele două coloane. Obținem

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

În sfîrșit, din D_2 analog ca mai înainte, avem

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$$

și cum $D_3 \neq 0$ rezultă că cele două polinoame au trei rădăcini comune.

Observație. Acest procedeu este util numai atunci cînd se pune problema de a stabili dacă două polinoame au rădăcini comune sau nu. El nu ne ajută la a găsi efectiv aceste rădăcini.

5. Tot în legătură cu polinoamele numerice menționăm proprietatea cunoscută că, dacă $x = x_0$ este o rădăcină multiplă de ordinul k a polinomului P, atunci ea anulează și primele lui $k-1$ derivate P', P'', ..., $P^{(k-1)}$, iar $P^{(k)}(x_0) \neq 0$ și reciproc. Totodată această proprietate ne arată că rădăcinile multiple ale unui polinom P sînt rădăcini comune pentru acesta și pentru polinomul derivat P'. Rezultă că *rădăcinile multiple ale unui polinom* P *sînt rădăcinile celui mai mare divizor comun al polinoamelor* P și P'.

De pildă, dîndu-se $P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ avem $P'(x) = 3x^2 + 2x - 5$ și aplicînd algoritmul lui *Euclid* polinoamelor P și P' obținem cel mai mare divizor comun al lor $D(x) = x - 1$, prin urmare $x = 1$ este o rădăcină mul-

Scanned with OKEN Scanner

tiplă a polinomului P. Deoarece ea este rădăcină simplă pentru P' rezultă că ordinul său de multiplicitate este 2.

Observație. Faptul de a stabili dacă un polinom P are sau nu rădăcini multiple se poate stabili fie operînd cu ajutorul determinanților *Sylvester* ai coeficienților polinoamelor P și P', fie — ca în exemplul dat — aflînd efectiv c.m.m.d.c. al polinoamelor P și P'.

6. Fie acum P și Q două polinoame de gradul n din $\mathcal{C}[x]$: $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x_n + a_n$; $Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$ și să presupunem că ele au aceleași rădăcini $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (raționamentul care urmează și rezultatele ce se obțin sînt independente de faptul dacă unele rădăcini sînt multiple). Atunci avem

$$P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n);$$
$$Q(x) = b_0(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

și prin urmare $b_0 P(x) = a_0 Q(x)$ adică

$$b_0(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n) = a_0(b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_nx + b_n)$$

egalitate care implică $b_0a_k = a_0b_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Deoarece polinoamele sînt de gradul n, coeficienții dominanți a_0, b_0 vor fi nenuli și prin urmare vom avea $b_k = 0$ dacă $a_k = 0$ și reciproc, oricare ar fi $k = 1, 2, \ldots, n$.

Dacă însă coeficienții a_k și b_k sînt nenuli $k = 1, 2, \ldots, n$ atunci din egalitatea de mai sus avem

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{a_0}{b_0}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Rezultă că cele două polinoame au coeficienții termenilor de același grad proporționali.

Reciproc, presupunem că cele două polinoame au coeficienții proporționali deci $a_k = c \cdot b_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ unde c este o constantă nenulă deoarece coeficienții a_0 și b_0 sînt nenuli.

Atunci

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} cb_kx^{n-k} = c\sum_{k=0}^{n} b_kx^{n-k} = c \cdot Q(x)$$

de unde se vede că orice rădăcină a polinomului P este rădăcină și a polinomului Q și reciproc.

Scanned with OKEN Scanner

Am obținut în felul acesta următorul rezultat:

Condiția necesară și suficientă ca două polinoame din $\mathcal{C}[x]$ să aibă aceleași rădăcini este ca ele să aibă coeficienții termenilor de același grad proporționali.

7. Să presupunem acum că luăm polinoamele $P, Q \in \mathcal{C}[x]$, Q fiind nenul și avînd descompunerea

$$Q(x) = (x - x_1)^{p_1} \cdot (x - x_2)^{p_2} \dots (x - x_n)^{p_n}$$

(pentru cele ce urmează nu este esențial ca Q să aibă coeficientul dominant diferit de unitate). Atunci, conform teoremei de împărțire cu rest, avem

$$P = C \cdot Q + R, \qquad \text{grad } R < \text{grad } Q$$

și prin urmare

$$\frac{P}{Q} = C + \frac{R}{Q}.$$

În numeroase aplicații își găsește o mare utilitate următoarea

Teoremă de descompunere în fracții simple pe care numai o enunțăm (demonstrația ei este o aplicație a teoriei celui mai mare divizor comun).

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ se poate scrie în mod unic sub forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{a_{11}}{x - x_1} = \frac{a_{12}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{a_{1p_1}}{(x - x_1)^{p_1}} +$$

$$+ \frac{a_{21}}{x - x_2} + \frac{a_{22}}{(x - x_2)^2} + \dots + \frac{a_{2p_2}}{(x - x_2)^{p_2}} +$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \frac{a_{n1}}{x - x_n} + \frac{a_{n2}}{(x - x_n)^2} + \dots + \frac{a_{np_n}}{(x - x_n)^{p_n}};$$

$$x \neq x_i \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

unde a_{ij}, $i, j = 1, 2, \dots, n$ sînt constante din corpul $\mathcal{C}$ care se pot determina (de obicei se elimină numitorii și se identifică coeficienții termenilor de același grad).

Exemplu. Dacă $Q(x) = (x - 1) \cdot (x - 2)^3$ atunci

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{a_{11}}{x - 1} + \frac{a_{21}}{x - 2} + \frac{a_{22}}{(x - 2)^2} + \frac{a_{23}}{(x - 2)^3}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Dacă polinomul Q are toate rădăcinile simple atunci

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

și descompunerea în fracții simple va fi

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{c_1}{x - x_1} + \frac{c_2}{x - x_2} + \dots + \frac{c_n}{x - x_n}.$$

Să considerăm că grad $P <$ grad Q (în caz contrar facem împărțirea și neglijăm cîtul C). Atunci

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{x - x_k}.$$

Pentru calculul constantelor c_k vom face mai întîi observația că dacă se consideră polinomul Q derivat

$$Q'(x) = (x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) + (x - x_1)(x - x_3)(x - x_4) \dots$$
$$\dots (x - x_n) + \dots + (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1})$$

atunci, dacă în egalitatea de mai sus înmulțim în ambii membri cu $x - x_1$ obținem

$$\frac{P(x)}{(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n)} = c_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{c_k(x - x_1)}{x - x_k}$$

și făcînd $x = x_1$ rezultă

$$c_1 = \frac{P(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)} = \frac{P(x_1)}{Q'(x_1)}.$$

Dacă în loc de $x - x_1$ am fi înmulțit cu $x - x_2$ și apoi am fi făcut $x = x_2$, am fi obținut

$$c_2 = \frac{P(x_2)}{Q'(x_2)}$$

și analog

$$c_k = \frac{P(x_k)}{Q'(x_k)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

În felul acesta rezultă că

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(x_k)}{(x - x_k)Q'(x_k)},$$

Scanned with OKEN Scanner

iar de aici deducem următoarea identitate cunoscută sub numele de *formula de interpolare a lui Lagrange:*

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(x_k)}{Q'(x_k)} \cdot \frac{Q(x)}{x - x_k}.$$

Aplicație. Se dau n constante distincte $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n > 1)$ cu ajutorul cărora se definesc polinoamele

$$p_k(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{k-1})(x - a_{k+1}) \ldots (x - a_n),$$
$$k = 1, 2, \ldots, n.$$

Să se rezolve ecuația $P(x) = b$ unde $P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{p_k(x)}{p_k(a_k)}$ iar b este o constantă.

Rezolvare. Dacă notăm $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$ atunci vom avea

$$p_k(x) = \frac{Q(x)}{x - x_k}; \quad p_k(a_k) = Q'(a_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Atunci

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{Q(x)}{Q'(a_k)(x - x_k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{Q'(a_k)} \cdot \frac{Q(x)}{x - x_k}$$

ceea ce, conform identității de mai sus ne arată că $P(a_k) = a_k$, adică $P(x) = x$ și vom avea $x = b$.

§ 2. CÎTEVA REZULTATE REMARCABILE ASUPRA RĂDĂCINILOR POLINOAMELOR DIN $\mathcal{C}[x]$

1. *Margini ale modulelor rădăcinilor*

a) Fie polinomul $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$, $a_k \in \mathcal{C}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ și să presupunem că $x_0 \in \mathcal{C}$ este o rădăcină a sa, deci

$$P(x_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k x_0^{n-k} = 0 \quad \text{de unde} \quad a_0 x_0^n = -\sum_{k=1}^{n} a_k x_0^{n-k}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă notăm $r_0 = |x_0|$ și $A_k = |a_k|$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ atunci din egalitatea de mai sus avem

$$A_0 r_0^n = |a_0| \cdot |x_0|^n = |a_0 x_0^n| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} a_k x_0^{n-k} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k x_0^{n-k}| = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \cdot |x_0|^{n-k}$$

deci

$$A_0 r_0^n \leqslant \sum_{k=1}^{n} A_k r_0^{n-k}$$

ceea ce ne arată că

$$Q(r_0) = A_0 r_0^n - \sum_{k=1}^{n} A_k r_0^{n-k} \leqslant 0,$$

unde Q este polinom cu coeficienți reali care are coeficientul dominant pozitiv, iar ceilalți coeficienți sînt toți negativi. Dar vom vedea (teorema lui *Descartes*) că un polinom de această formă are o singură rădăcină pozitivă și dacă o notăm pe aceasta cu r avem

$$Q(r_0) > 0 \text{ dacă } r_0 > r; \quad Q(r_0) \leqslant 0 \text{ dacă } r_0 \leqslant r.$$

Rezultă că rădăcina pozitivă r este o margine superioară a modulelor rădăcinilor polinomului P.

Pentru a afla o margine inferioară facem mai întîi transformarea $x = \frac{1}{y}$ cu ajutorul căreia obținem

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{y^{n-k}} = \frac{1}{y^n} \sum_{k=0}^{n} a_k y^k$$

și apoi aplicăm un raționament analog celui de mai sus polinomului cu coeficienți complecși

$$P^*(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^k.$$

Dacă r' este o margine superioară a modulelor rădăcinilor lui P^*, atunci $\frac{1}{r'}$ este o margine inferioară a modulelor rădăcinilor lui P.

Scanned with OKEN Scanner

b) Considerînd acum $x \in \mathcal{C}$ un număr arbitrar și notînd $\rho = |x|$ atunci, dacă polinomul P nu are rădăcini nule, putem scrie

$$P(x) = x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} \text{ și } \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k}\right| = \left|a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x^k}\right| \geqslant |a_0| - \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{a^k}{x_k}\right|$$

adică

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k}\right| \geqslant A_0 - \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{\rho^k}.$$

Dar o funcție de forma $f(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k x^k$; $A_k > 0$ definită pe R^+ și cu valori reale este continuă și prin urmare pentru valori x suficient de mici, valorile funcției devin suficient de mici. Vom putea găsi deci valori ρ pentru care să avem

$$A_0 > \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{\rho^k}.$$

De pildă, dacă se consideră M cel mai mare dintre numerele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ și luăm

$$\frac{1}{\rho} < \frac{A_0}{A_0 + M} \quad \text{adică} \quad \rho > 1 + \frac{M}{A_0}$$

vom avea

$$|P(x)| = \left|x^n \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k}\right| \geqslant \rho^n \left(A_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{\rho^k}\right) > 0.$$

Așadar, numărul $1 + \frac{M}{A_0}$ este o margine superioară a modulelor rădăcinilor polinomului P. Pentru marginea inferioară se procedează ca mai înainte.

2. *Teorema lui Hurwitz*[1]

Această teoremă dă condițiile necesare și suficiente pentru ca rădăcinile unui polinom $P \in \mathrm{R}[x]$ să aibă părțile reale negative (deci imaginile lor în planul cartezian să fie situate în semiplanul stîng) și rezolvă în felul acesta o problemă de deosebit interes practic.

---

[1] Deși această teoremă este aplicabilă polinoamelor din $R(x]$ o includem în acest capitol, deoarece toate rezultatele care servesc la demonstrarea ei privesc polinoamele din $\mathcal{C}[x]$.

Pentru a putea demonstra această teoremă (demonstrația pe care o prezentăm este dată de către Schur) este nevoie mai întîi să punem în evidență cîteva rezultate preliminare. Fie pentru aceasta polinomul $P \in \mathcal{C}[x]$ de gradul n.

Definiție. Polinomul P se numește *polinom Hurwitz* (pe scurt polinom (H)), dacă toate rădăcinile sale au părțile reale negative.

Să considerăm

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

și fie polinomul auxiliar

$$P^*(x) = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k (-x)^k = \bar{a}_0 - \bar{a}_1 x + \bar{a}_2 - \ldots + (-1)^n \bar{a}_n x^n$$

obținut — după cum se vede — din P înlocuindu-i coeficienții prin conjugatele acestora și pe x prin $-x$. Vom face cu privire la ele cîteva observații:

1) Dacă $P(x) = c$ (const.) atunci $P^*(x) = \bar{c}$, adică $c^* = \bar{c}$;

1') Dacă coeficienții $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sînt reali atunci $a_k^* = \bar{a}_k = a_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ și $P^*(x) = P(-x)$;

2) Dacă $P = Q \pm R$ atunci $P^* = Q^* \pm R^*$.

Într-adevăr, dacă se consideră $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ și $R(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ avem

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} (b_k \pm c_k) x^k \quad \text{și prin urmare}$$

$$P^*(x) = \sum_{k=0}^{n} \overline{(b_k \pm c_k)} (-x)^k = \sum_{k=0}^{n} (\bar{b} \pm \bar{c}) (-x)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \bar{b}_k (-x)^k \pm \sum_{k=0}^{n} \bar{c}_k (-x)^k = Q^*(x) \pm R^*(x).$$

3) $P^{**}(x) = P(x)$

Într-adevăr,

$$P^{**}(x) = (P^*(x))^* =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k (-x)^k \right)^* = \sum_{k=0}^{n} \overline{(\bar{a}_k)} (-(-x))^k = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = P(x).$$

Scanned with OKEN Scanner

4) Dacă $P = Q \cdot R$ atunci $P^* = Q^* \cdot R^*$.

Fie

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k; \quad Q(x) = \sum_{j=0}^{p} b_i x^i; \quad R(x) = \sum_{j=0}^{q} c_j x^j$$

cu $p + q = n$. Atunci vom avea

$$a_k = \sum_{i+j=k} b_i c_j \quad i = 0, 1, \ldots, p; \quad j = 0, 1, \ldots, q;$$

$$k = 0, 1, \ldots, p + q$$

şi prin urmare

$$P^*(x) = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k (-x)^k = \sum_{k=0}^{n} \left(\overline{\sum_{i+j=k}} b_i c_j \right) (-x)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i+j=k} \bar{b}_i \bar{c}_j \right) (-x)^k = \sum_{i=0}^{p} \bar{b}_i (-x)^i \cdot \sum_{j=0}^{q} \bar{c}_j (-x)^j \text{ cu}$$

$$p + q = n.$$

Rezultă că $P^*(x) = Q^*(x) \cdot R^*(x)$.

5) Dacă polinomul P are rădăcinile x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ atunci P^* are rădăcinile $-\bar{x}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Într-adevăr, deoarece

$$P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = a_n \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)$$

avem

$$P^*(x) = \bar{a}_n \prod_{k=1}^{n} (-x - \bar{x}_k) = (-1)^n \cdot \bar{a}_n \prod_{k=1}^{n} (x + \bar{x}_k)$$

tocmai ceea ce am afirmat.

Vom da acum cîteva teoreme cu privire la condiţiile necesare şi suficiente pentru ca un polinom să fie polinom (H). Pentru aceasta dăm mai întîi următoarea

Lemă. Dacă P este un polinom (H) atunci

$0 \leqslant |P(x)| < |P^*(x)|$ dacă $Re(x) < 0$

$0 \leqslant |P^*(x)| < |P(x)|$ dacă $Re(x) > 0$

$0 < |P(x)| = |P^*(x)|$ dacă $Re(x) = 0$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a demonstra această lemă să observăm că, în baza observației 5), avem

$$|P(x)| = |a_n| \cdot \prod_{k=1}^{n} |x - x_k|; \quad |P^*(x)| = |\bar{a}_n| \cdot \prod_{k=1}^{n} |x + \bar{x}_k|.$$

Fie acum $x = \alpha + \beta i$ și $x_k = \alpha_k + \beta_k i$, $k = 1, 2, \ldots, n$; avem

$$|x + \bar{x}_k|^2 - |x - x_k|^2 = (\alpha + \alpha_k)^2 + (\beta - \beta_k)^2 - \\ - (\alpha - \alpha_k)^2 - (\beta - \beta_k)^2 = 4\alpha\alpha_k$$

egalitate care ne arată, că dacă P este un polinom (H), deci $\alpha_k < 0$, atunci:

$$|x - x_k| < |x + \bar{x}_k| \quad \text{dacă} \quad \alpha = Re(x) < 0$$
$$|x + \bar{x}_k| < |x - x_k| \quad \text{dacă} \quad \alpha > 0$$
$$|x + \bar{x}_k| = |x - x_k| \quad \text{dacă} \quad \alpha = 0$$

oricare ar fi $k = 1, 2, \ldots, n$.

Ținînd seamă de aceste rezultate precum și de faptul că $|a_n| = |\bar{a}_n|$, afirmațiile din lemă devin evidente.

Vom trece acum la prezentarea teoremelor la care ne-am referit mai sus.

Teorema 1. Polinomul P este un polinom (H) dacă și numai dacă polinomul

$$Q(x) = \alpha P(x) - \beta P^*(x)$$

este un polinom (H), unde α și β sînt numere arbitrare, astfel încît $|\alpha| > |\beta|$.

Demonstrație

Presupunem că P este un polinom (H). Atunci, conform lemei, dacă $Re(x) \geqslant 0$ avem $|P(x)| \geqslant |P^*(x)|$ și cum prin ipoteză $|\alpha| > |\beta|$ rezultă că

$$|\alpha P(x)| > |\beta P^*(x)|.$$

Fie acum x_k o rădăcină a lui Q, deci

$$Q(x_k) = \alpha P(x_k) - \beta P^*(x_k) = 0 \quad \text{sau} \quad \alpha P(x_k) = \beta P^*(x_k)$$

egalitate care, avînd în vedere implicația

$$Re(x) \geqslant 0 \Rightarrow |\alpha P(x)| > |\beta P^*(x)|$$

(dovedită mai sus), nu este valabilă decît dacă $Re(x_k) < 0$. Rezultă că Q este un polinom (H).

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrația reciprocei revine, în fapt, la cele de mai înainte făcînd următoarele observații:

avem $Q^*(x) = (\alpha P(x) - \beta P^*(x))^* = \bar{\alpha} P^*(x) - \bar{\beta} P(x)$

(valabile conform 1), 2), 3) de la începutul paragrafului), iar din sistemul

$$\alpha P(x) - \beta P^*(x) = Q(x)$$
$$\bar{\alpha} P^*(x) - \bar{\beta} P(x) = Q^*(x)$$

se poate exprima $P(x)$ și anume

$$P(x) = \alpha_1 Q(x) - \beta_1 Q(x)$$

unde

$$\alpha_1 = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta}}; \quad \beta_1 = -\frac{\beta}{\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta}}.$$

Dar, deoarece prin ipoteză $|\alpha| > |\beta|$ rezultă că

$$|\alpha_1| = \frac{|\bar{\alpha}|}{|\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta}|} = \frac{|\alpha|}{|\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta}|} > \frac{|\beta|}{|\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta}|} = |\beta_1|$$

încît, P și Q așa cum au fost date în teoremă și-au schimbat rolurile. Conform primei părți a demonstrației rezultă și valabilitatea reciprocei.

Teorema 2. Fie polinomul P și un număr ξ astfel că $Re(\xi) < 0$. Atunci P este un polinom (H) dacă și numai dacă

$$|P(\xi)| < |P^*(\xi)|,$$

iar polinomul de gradul $n - 1$

$$P_1(x) = \frac{P^*(\xi)P(x) - P(\xi)P^*(x)}{x - \xi}$$

este un polinom (H).

Demonstrație

Dacă P este un polinom (H), atunci conform lemei, din ipoteza $Re(\xi) < 0$ rezultă că

$$|P(\xi)| < |P^*(\xi)|$$

și notînd $\alpha = P^*(\xi)$, $\beta = P(\xi)$ se vede că este satisfăcută condiția $|\alpha| > |\beta|$ din teorema 1; prin urmare, polinomul

$$Q(x) = P^*(\xi)P(x) - P(\xi)P^*(x)$$

Scanned with OKEN Scanner

va fi un polinom (H). Dar, în plus,

$$Q(\xi) = P^*(\xi)P(\xi) - P(\xi)P^*(\xi) = 0$$

deci $x = \xi$ este o rădăcină a polinomului Q, încît expresia

$$P_1(x) = \frac{Q(x)}{x - \xi}$$

va reprezenta un polinom (H) de gradul $n - 1$.

Reciproc, presupunînd că P_1 este un polinom (H) de gradul $n - 1$ și ținînd seamă de ipoteza $Re(\xi) < 0$ rezultă că polinomul

$$Q(x) = P_1(x)\,(x - \xi)$$

va fi un polinom (H) de gradul n. Făcînd uz acum și de ipoteza

$$|\,P(\xi)\,| < |\,P^*(\xi)\,|$$

sîntem în condițiile reciprocei teoremei 1 și prin urmare P este un polinom (H).

Pentru a trece mai departe să notăm

$$S(x,\ \xi) = \frac{P^*(\xi)P(x) - P(\xi)P^*(x)}{x - \xi}$$

care se vede că este un polinom simetric în x și ξ și are gradul $n - 1$ atît în raport cu x, cît și în raport cu ξ. Scriindu-l ca polinom în ξ avem

$$S(x,\ \xi) = S_0(x) + S_1(x)\,\xi + \ldots + S_{n-1}(x)\,\xi^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x)\,\xi^k$$

și prin urmare, egalitatea

$$(x - \xi)S(x,\ \xi) = P^*(\xi)P(x) - P(\xi)P^*(x)$$

se va scrie

$$(x - \xi)\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x)\,\xi^k = P(x)\sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k(-\xi)^k - P^*(x)\sum_{k=0}^{n} a_k\,\xi^k$$

sau

$$x\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x)\,\xi^k - \sum_{k=0}^{n} S_k(x)\,\xi^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} [(-1)^k \cdot \bar{a}_k P(x) - a_k P^*(x)]\,\xi^k \quad .$$

Scanned with OKEN Scanner

iar făcînd identificarea termenilor de gradul zero și a celor de gradul întîi avem

$$(1)\ \begin{cases} \bar{a}_0 P(x) - a_0 P^*(x) = xS_0(x) \\ -a_1 P(x) - a_1 P(x) = xS_1(x) - S_0(x) \end{cases}$$

Înmulțind a doua egalitate cu x și adunîndu-le rezultă

$$(2)\ x^2 S_1(x) = (\bar{a}_0 - \bar{a}_1 x) P(x) - (a_0 + a_1 x) P^*(x).$$

Înmulțind acum prima din egalitățile (1) cu x, iar rezultatul (2) cu ξ și adunînd obținem

$$x^2[S_0(x) + \xi S_1(x)] = (\bar{a}_0 x + \bar{a}_0 \xi - \bar{a}_1 x \xi) P(x) - \\ - (a_0 x + a_0 \xi + a_1 x \xi) P^*(x)$$

încît notînd

$$\varphi(x) = \bar{a}_0 x + \bar{a}_0 \xi - \bar{a}_1 x \xi; \quad \psi(x) = a_0 x + a_0 \xi + a_1 x \xi$$

avem

$$(3)\ x^2[S_0(x) + \xi S_1(x)] = \varphi(x) P(x) - \psi(x) P^*(x).$$

Vom da acum

Teorema 3. Fie polinomul P și un număr ξ cu $Re(\xi) < 0$. Atunci P este un polinom (H) dacă și numai dacă

$$a_0 \neq 0 \quad \text{și} \quad Re\left(\frac{a_1}{a_0}\right) > 0,$$

iar polinomul de gradul $n - 1$

$$H(x) = S_0(x) + \xi S_1(x)$$

este un polinom (H).

Demonstrație

Presupunem întîi că P este un polinom (H). Atunci oricare ar fi x_k o rădăcină a sa $Re(x_k) < 0$, deci $x_k \neq 0$, de unde rezultă că $a_0 \neq 0$ (în caz contrar ar exista rădăcini nule). Să observăm acum că raportul $\frac{a_1}{a_0}$ este egal cu un raport de sume de tip *Viète* și anume

$$\frac{a_1}{a_0} = -\frac{x_1 x_2 \dots x_{n-1} + \dots + x_2 x_3 \dots x_n}{x_1 x_2 \dots x_n} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}$$

și prin urmare

$$Re\left(\frac{a_1}{a_0}\right) > 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a demonstra că H este un polinom (H) procedăm prin reducere la absurd, deci presupunem că există $x = x_0$ o rădăcină a sa pentru care $Re(x_0) \geqslant 0$.

Fie ξ_0 un număr astfel că $Re(\xi_0) < 0$. Atunci, conform teoremei 2, polinomul $P_1(x) = S(x, \xi_0)$ este un polinom (H) și deci $P_1(x_0) = S(x_0, \xi_0) \neq 0$ adică

$\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x_0)\,\xi_0^k \neq 0$ sau — înlocuind ξ_0 cu $\frac{1}{\xi_0}$ și ținînd seamă că

$$Re\left(\frac{1}{\xi_0}\right) < 0,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x_0)\,\frac{1}{\xi_0^k} = \frac{1}{\xi_0^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x_0)\,\xi_0^{n-1-k} \neq 0$$

ceea ce ne arată că rădăcinile ecuației

$$\sum_{k=0}^{n-1} S_k(x_0)\,\xi_0^{n-1-k} = 0$$

au părțile reale nenegative și cum aceeași proprietate o va avea și suma lor urmează că:

a) — dacă $S_0(x_0) \neq 0$ atunci scriind prima sumă *Viète* avem

$$Re\left[-\frac{S_1(x_0)}{S_0(x_0)}\right] \geqslant 0.$$

Dar x_0 este o rădăcină a lui H și prin urmare

$$H(x_0) = S_0(x_0) + \xi_0 S_1(x_0) = 0 \quad \text{deci} \quad -\frac{S_1(x_0)}{S_0(x_0)} = \frac{1}{\xi_0}.$$

Cum însă $Re\left(\frac{1}{\xi_0}\right) < 0$ avem și $Re\left[-\frac{S_1(x_0)}{S_0(x_0)}\right] < 0$. Contradicție!

b) — dacă $S_0(x_0) = 0$ atunci din $H(x_0) = 0$ rezultă și $S_1(x_0) = 0$ încît relațiile (1) devin

$$\bar{a}_0 P(x_0) - a_0 P^*(x_0) = 0; \quad \bar{a}_1 P(x_0) + a_1 P^*(x_0) = 0$$

deci

$$(\bar{a}_0 a_1 + a_0 \bar{a}_1) P(x_0) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar P este un polinom (H) și cum prin ipoteză $Re(x_0) \geqslant 0$ rezultă că $P(x_0) \neq 0$ așa încît din egalitatea de mai sus avem

$$\bar{a}_0 a_1 + a_0 \bar{a}_1 = 0 \quad \text{adică} \quad \frac{a_1}{a_0} = -\frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_0} = -\left(\overline{\frac{a_1}{a_0}}\right)$$

ceea ce înseamnă că $Re\left(\frac{a_1}{a_0}\right) = 0$ contrar inegalității $Re\left(\frac{a_1}{a_0}\right) > 0$ stabilită la începutul demonstrației.

Rezultă deci că H nu admite nici o rădăcină x_0 cu $Re(x_0) \geqslant 0$. El este deci un polinom (H).

Reciproc, să presupunem că H este un polinom (H), iar $a_0 \neq 0$ și $Re\left(\frac{a_1}{a_0}\right) > 0$. Demonstrăm că P este un polinom (H), iar demonstrația o dăm prin reducere la absurd.

Vom presupune deci că P nu este un polinom (H) și prin urmare există o rădăcină x_0 a lui (care este nenulă deoarece prin ipoteză $a_0 \neq 0$), astfel încît $Re(x_0) \geqslant 0$. Să reluăm acum relația (3) pe care, cu ajutorul polinomului H o putem scrie sub forma

$$x^2 H(x) = \varphi(x) P(x) - P^*(x) \psi(x) \tag{4}$$

din care rezultă

$$[x^2 H(x)]^* = [\varphi(x) P(x) - P^*(x) \psi(x)]^*$$

sau

$$x^2 H^*(x) = \varphi^*(x) P^*(x) - P(x) \psi^*(x). \tag{5}$$

Cu ajutorul egalităților (4) și (5) deducem

$$x^2[H(x)\varphi^*(x) + H^*(x)\psi^*(x)] = [\varphi^*(x)\varphi(x) - \psi^*(x)\psi(x)]P(x).$$

Cum x_0 este o rădăcină nenulă a lui P rezultă că

$$H(x_0)\varphi^*(x_0) + H^*(x_0)\psi(x_0) = 0. \tag{6}$$

Să ne reamintim acum (vezi demonstrația lemei) că dacă un număr c este o rădăcină a unui polinom (H) atunci avem

$$|x - c| < |x + \bar{c}| \quad \text{dacă} \quad Re(x) < 0 \tag{7}$$

În această inegalitate substituim

$$x = -\frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{x_0}; \qquad c = \frac{1}{\xi}$$

Scanned with OKEN Scanner

și se vede că în baza ipotezei și a modului cum a fost ales x_0 avem

$$Re(x) < 0 \qquad \text{și} \qquad Re(\xi) < 0.$$

În felul acesta inegalitatea (7) devine

$$\left| -\frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{x_0} - \frac{1}{\xi} \right| < \left| -\frac{a_1}{a_0} - \frac{1}{x_0} + \frac{1}{\xi} \right|$$

sau

$$| a_1 x_0 \xi + a_0 \xi + a_0 x_0 | < | a_1 x_0 \bar{\xi} + a_0 \bar{\xi} - a_0 x_0 |$$

adică

$$| \psi(x_0) | < | \varphi^*(x_0) |.$$

Deoarece pentru x_0 avem $Re(x_0) \geqslant 0$ rezultă din lemă că

$$| H^*(x_0) | \leqslant | H(x_0) |$$

și înmulțind ultimele două inegalități membru cu membru obținem

$$| \varphi(x_0) H^*(x_0) | < | \varphi^*(x_0) H(x_0) |$$

inegalitate care, evident este în contradicție cu rezultatul (6). Așadar P este un polinom (H).

Pentru a termina demonstrația teoremei vom observa că în enunțul ei am afirmat că polinomul H are gradul $n - 1$, fapt pe care încă nu l-am arătat. Pent u a-l dovedi să pornim de la observația că datorită modului cum au fost definite polinoamele φ și ψ ele au gradul unu și prin urmare membrul drept al egalității (4) nu poate fi mai mare ca $n + 1$.

Deci grad $[x^2 H(x)] \leqslant n + 1$ adică grad $H \leqslant n - 1$.

Să presupunem prin absurd că grad $H < n - 1$. Aceasta ar impune ca în membrul drept al egalității (4) coeficientul termenului de gradul $n + 1$ să fie nul adică

$$a_n(\bar{a}_0 - \bar{a}_1 \xi) - (-1)^n \cdot \bar{a}_n(a_0 + a_1 \xi) = 0$$

ceea ce implică

$$| \bar{a}_0 - \bar{a}_1 \xi | = | a_0 + a_1 \xi | \quad \text{și} \quad \left| \frac{1}{\xi} - \frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_0} \right| = \left| \frac{1}{\xi} + \frac{a_1}{a_0} \right|.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar, în inegalitatea (7) substituind $x = \frac{1}{\xi}$ și $c = -\frac{a_1}{a_0}$ și avînd în vedere ipoteza teoremei obținem

$$\left|\frac{1}{\xi} + \frac{a_1}{a_0}\right| < \left|\frac{1}{\xi} - \frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_0}\right|,$$

inegalitate contradictorie cu egalitatea la care am fost conduși presupunînd că grad $H < n - 1$. Rămîne deci că grad $H = n - 1$.

Cu aceasta teorema 3 a fost complet demonstrată.

Importanța teoremei 3 rezidă în utilitatea ei practică pentru că, în esență, ea ne arată condițiile necesare și suficiente pentru a transfera problema demonstrării dacă un polinom de gradul n este polinom (H) la o problemă similară, însă pentru un polinom de gradul $n - 1$. Aceasta o face aplicabilă prin recurență sau utilizabilă în cazul în care raționăm prin inducție completă.

Putem aborda acum *teorema lui Hurwitz.*

Dîndu-se polinomul

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

cu coeficienți reali și $a_0 > 0$, atunci rădăcinile sale au părțile reale negative dacă și numai dacă toți determinanții

$$D_1 = a_1; \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}; \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & a_n \end{vmatrix}$$

sînt pozitivi.

Înainte de a demonstra teorema să remarcăm că în scrierea acestor determinanți toate elementele a_j pentru care $j > n$ se iau egale cu zero. De pildă, pentru polinomul

$$P(x) = 2 + x + 3x^2 + 2x^3$$

Scanned with OKEN Scanner

în care $a_0 = 2$; $a_1 = 1$ $a_2 = 3$; $a_3 = 2$ vom avea

$$D_1 = a_1 = 1; \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

iar pentru scrierea determinantului D_3 vom considera $a_4 = a_5 = 0$, încît acesta va fi

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

Pentru a demonstra teorema va fi suficient să arătăm că trecerea, pe baza teoremei 3, de la condițiile necesare și suficiente pentru polinomul P de gradul n, la condițiile necesare și suficiente pentru polinomul corespunzător de gradul $n-1$ se face cu păstrarea condițiilor impuse în teoremă.

Fie

$$P_1(x) = a_0 + a_2x^2 + \ldots = \sum_{k=0,\,1,\,2,\,\ldots} a_{2k}x^{2k}$$

$$P_2(x) = a_1x + a_3x^3 + \ldots = \sum_{k=0,\,1,\,2,\,\ldots} a_{2k+1}x^{2k+1}$$

Vom avea evident

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x); \quad P^*(x) = P_1(x) - P_2(x)$$

și

$$\varphi(x) = a_0x - a_1\xi x + a_0\xi; \quad \psi(x) = a_0x + a_1\xi x + a_0\xi$$

deci

$$x^2H(x) = \varphi(x)P(x) - \psi(x)P^*(x) =$$
$$= (a_0x - a_1\xi x + a_0\xi)\,[P_1(x) + P_2(x)] -$$
$$- (a_0x + a_1\xi x + a_0\xi)\,[P_1(x) - P_2(x)]$$

sau

$$x^2H(x) = 2(a_0x + a_0\xi)P_2(x) - 2a_1\xi xP_1(x) =$$
$$= 2a_0(x+\xi)\sum_{k=0,\,1,\,2,\,\ldots} a_{2k+1}x^{2k+1} - 2a_1\xi x\sum_{k=0,\,1,\,2,\,\ldots} a_{2k}x^{2k},$$

Scanned with OKEN Scanner

iar împărțind în ambii membri cu x

$$xH(x) = 2\left[a_0 \sum_{k=0,\,1,\,\ldots} a_{2k+1}x^{2k+1} + a_0\xi \sum_{k=0,\,1,\,\ldots} a_{2+k1}x^{2k} - \right.$$

$$\left. - a_1\xi \sum_{k=0,\,1,\,\ldots} a_{2k}x^{2k}\right] = 2\left[a_0 \sum_{k=0,\,1,\,\ldots} a_{2k+1}x^{2k+1} + \right.$$

$$\left. + \xi \sum_{k=0,\,1,\,\ldots} (a_0a_{2k+1} - a_1a_{2k})x^{2k}\right]$$

adică

$$xH(x) = 2\left[a_0 \sum_{k=0,\,1,\ldots} a_{2k+1}x^{2k+1} + \xi \sum_{k=1,\,2,\ldots} (a_0a_{2k+1} - a_1a_{2k})x^{2k}\right]$$

observînd că la a doua sumă, pentru $k = 0$ se obține $a_0a_1 - a_1a_0 = 0$.

Împărțind din nou cu x avem

$$H(x) = 2L(x) \text{ unde am notat}$$

$$L(x) = a_0 \sum_{k=0,\,1,\,\ldots} a_{2k+1}x^{2k} + \xi \sum_{k=1,\,2,\,\ldots} (a_0a_{2k+1} - a_1a_{2k})x^{2k-1}.$$

Polinomul L diferă de H printr-o constantă ceea ce nu afectează folosirea lui în raport cu P în condițiile teoremei 3. Pentru a putea face apel la această teoremă să luăm mai întîi $\xi = -1$; celelalte condiții sînt satisfăcute deoarece $a_0 \neq 0$ (prin ipoteză avem $a_0 > 0$) și $\frac{a_1}{a_0} > 0$ pentru că $a_0 > 0$ și $a_1 = D_1 > 0$.

Scriindu-l dezvoltat polinomul L este

$$L(x) = a_0a_1 + (a_1a_2 - a_0a_3)x + a_0a_3x^2 + (a_1a_4 - a_0a_5)x^3 + \ldots$$

și conform teoremei 3 polinomul P este polinom (H) dacă și numai dacă polinomul L este polinom (H). Ne mai rămîne să vedem dacă condițiile impuse prin teorema lui *Hurwitz* pentru polinomul P se transferă pentru polinomul L. Exprimînd aceste condiții pentru L va trebui ca toți determinanții

$$D_1' = a_1a_2 - a_0a_3; \qquad D_2' = \begin{vmatrix} a_1a_2 - a_0a_3 & a_0a_1 \\ a_1a_4 - a_0a_5 & a_0a_3 \end{vmatrix}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D_{n-1}' = \begin{vmatrix} a_1a_2 - a_0a_3 & a_0a_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ a_1a_4 - a_0a_5 & a_0a_3 & a_1a_2 - a_0a_3 & a_0a_1 & 0 & \ldots 0 \\ a_1a_6 - a_0a_7 & a_0a_5 & a_1a_4 - a_0a_5 & a_0a_3 & a_1a_2 - a_0a_3 & \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}$$

să fie pozitivi.

Scanned with OKEN Scanner

Dar se vede că

$$D_1' = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = D_2,$$

iar D_2', care mai întîi se descompune într-o diferență de doi determinanți, se scrie sub forma

$$D_2' = a_1 a_0 \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ a_4 & a_3 \end{vmatrix} - a_0^2 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_5 & a_3 \end{vmatrix} = a_0 \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = a_0 D_3.$$

De asemenea, în determinantul D_{n-1}' adunînd coloana a doua la a treia, coloana a patra la a cincea, ș.a.m.d. (dacă determinantul este de ordin impar operațiunea se termină adunînd penultima coloană la ultima, iar dacă el este de ordin par se termină adunînd antepenultima coloană la penultima, iar pe ultima lăsînd-o neschimbată), obținem

$$D_{n-1}' = \begin{vmatrix} a_1a_2 - a_0a_3 & a_0a_1 & a_0a_1 & 0 & 0 & \dots \\ a_1a_4 - a_0a_5 & a_0a_3 & a_1a_2 & a_0a_1 & a_0a_1 & \dots \\ a_1a_6 - a_0a_7 & a_0a_5 & a_1a_4 & a_0a_3 & a_1a_2 & \dots \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots \end{vmatrix}$$

Scoțînd factori pe a_0 pe coloanele de rang par și pe a_1 pe coloanele de rang impar (începînd cu a treia) rezultă că D_{n-1}' va conține factorul de forma $a_0^p a_1^q$, $p, q \in N$ și se va scrie sub forma

$$D_{n-1}' = a_0^p a_1^q \begin{vmatrix} a_1a_2 - a_0a_3 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots \\ a_1a_4 - a_0a_5 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ a_1a_6 - a_0a_7 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots \end{vmatrix}$$

ceea ce se mai poate scrie sub forma

$$D_{n-1}' = a_0^p a_1^q \left(a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots \end{vmatrix} - a_0 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots \\ a_5 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ a_7 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots \end{vmatrix} \right)$$

Scanned with OKEN Scanner

adică

$$D'_{n-1} = a_0^p a_1^q \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Prin urmare avem

$$D'_{n-1} = a_0^p a_1^q D_n.$$

Cum coeficienții a_0, a_1 sînt pozitivi rezultă că punînd condiția ca determinanții D_1, D_2, ...; D_n (considerați în teorema lui *Hurwitz* referitor la polinomul P care este de gradul n) să fie pozitivi, implică faptul ca determinanții D'_1, D'_2, ..., D'_{n-1} să fie pozitivi. Dar aceștia sînt tocmai determinanții ceruți de teoremă pentru polinomul L care este de gradul $n-1$.

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Exemplu

Pentru polinomul $P(x) = x^4 + 6x^3 + 15x^2 + 18x + 10$ avem $a_0 = 10 > 0$; $a_1 = 18$; $a_2 = 15$; $a_3 = 6$; $a_4 = 1$ și

$$D_1 = a_1 = 18 > 0; \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & 10 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} = 210 > 0$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & 10 & 0 \\ 6 & 15 & 18 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 576 > 0$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18 & 10 & 0 & 0 \\ 6 & 15 & 18 & 10 \\ 0 & 1 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 576.$$

Sînt îndeplinite deci cerințele din teorema lui *Hurwitz*. Rezultă că rădăcinile polinomului P au părțile reale negative. (Într-adevăr, rădăcinile polinomului sînt: $x_1 = -1 + i$; $x_2 = -1 - i$; $x_3 = -2 + i$; $x_4 = -2 - i$.)

Scanned with OKEN Scanner

3. În legătură cu poziția în plan a imaginilor rădăcinilor unui polinom $P \in \mathcal{C}[x]$ remarcăm și rezultatul următor cunoscut sub numele de

Teorema lui Lucas

Fie $P(x)$ un polinom ale cărui rădăcini au imaginile în plan situate de aceeași parte a unei drepte date. Atunci și rădăcinile polinomului derivat P' se găsesc de aceeași parte a dreptei respective sau pe dreaptă.

Demonstrație

Fie $P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ ale cărui rădăcini

$$x_k = \alpha_k + i\beta_k,\ \alpha_k;\ \beta_k \in R,\ k = 1, 2, \dots, n$$

pot fi simple sau multiple și presupunem că dîndu-se dreapta $au + bv + c = 0$, rădăcinile x_k, $k = 1, 2, \dots, n$ au imaginile în plan situate toate de o aceeași parte a ei.

Dacă notăm $D(u, v) = au + bv + c$ să presupunem, de pildă că, $D(\alpha_k, \beta_k) > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Teorema fiind în mod evident adevărată pentru acele rădăcini care sînt comune polinomului P și polinomului derivat P' o vom demonstra presupunînd că P și P' nu au rădăcini comune. Atunci, rădăcinile lui P' care nu sînt rădăcini ale lui P sînt date de ecuația

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = 0 \text{ sau } \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \dots + \frac{1}{x - x_n} = 0.$$

Să presupunem că $x' = \alpha + \beta i$; $\alpha, \beta \in R$ este o rădăcină a acestei ecuații.

Atunci, înlocuind în

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k} = 0$$

obținem

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha + \beta i - (\alpha_k + i\beta_k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\alpha - \alpha_k) + i(\beta - \beta_k)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(\alpha - \alpha_k) - i(\beta - \beta_k)}{(\alpha - \alpha_k)^2 + (\beta - \beta_k)^2} = 0$$

adică

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha - \alpha_k}{(\alpha - \alpha_k)^2 + (\beta - \beta_k)^2} - i \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta - \beta_k}{(\alpha - \alpha_k)^2 + (\beta - \beta_k)^2} = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă că

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha - \alpha_k}{(\alpha - \alpha_k)^2 + (\beta - \beta_k)^2} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta - \beta_k}{(\alpha - \alpha_k)^2 + (\beta - \beta_k)^2} = 0$$

și prin urmare

$$\alpha = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{(\alpha - \alpha_k)^2 + (\beta - \beta_k)^2}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\alpha - \alpha_k)^2 + (\beta - \beta_k)^2}}; \quad \beta = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{(\alpha - \alpha_k)^2 + (\beta - \beta_k)^2}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\alpha - \alpha_k)^2 + (\beta - \beta_k)^2}}.$$

Atunci

$$D(\alpha, \beta) = a\alpha + b\beta + c =$$

$$= \frac{a \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{(\alpha - \alpha_k)^2 + (\beta - \beta_k)^2}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\alpha - \alpha_k)^2 + (\beta - \beta_k)^2}} + \frac{b \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{(\alpha - \alpha_k)^2 + (\beta - \beta_k)^2}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\alpha - \alpha_k)^2 + (\beta - \beta_k)^2}} + c =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{a\alpha_k}{(\alpha-\alpha_k)^2+(\beta-\beta_k)^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{b\beta_k}{(\alpha-\alpha_k)^2+(\beta-\beta)_k{}^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{c}{(\alpha-\alpha_k)^2+(\beta-\beta_k)^2}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\alpha-\alpha_k)^2+(\beta-\beta_k)^2}} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{a\alpha_k + b\beta_k + c}{(\alpha - \alpha_k)^2 + (\beta - \beta_k)^2}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\alpha - \alpha_k)^2 + (\beta - \beta_k)^2}} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{D(\alpha_k, \beta_k)}{(\alpha - \alpha_k)^2 + (\beta - \beta_k)^2}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\alpha - \alpha_k)^2 + (\beta - \beta_k)^2}}$$

de unde se vede că $D(\alpha, \beta) > 0$ și prin urmare imaginea rădăcinii $x' = \alpha + \beta i$ se află în același semiplan cu imaginile rădăcinilor x_k.

În fapt, a rezultat că

$$\operatorname{sgn} D(\alpha, \beta) = \operatorname{sgn} D(\alpha_k, \beta_k)$$

ceea ce, pe lîngă afirmația din teorema lui *Lucas*, ne arată și faptul că, dacă $D(\alpha, \beta) = 0$ atunci și $D(\alpha_k, \beta_k)$. Cu alte cuvinte, dacă imaginile rădăcinilor lui P sînt pe o dreaptă, atunci și imaginile rădăcinilor lui P' se află pe aceeași dreaptă. Acest rezultat generalizează proprietatea cunoscută că, *dacă rădăcinile unui polinom sînt reale, atunci și rădăcinile polinomului derivat sînt reale.*

Scanned with OKEN Scanner

Consecință. Dacă imaginile în planul complex ale rădăcinilor unui polinom P se găsesc în interiorul unui contur poligonal (sau pe contur), atunci și imaginile rădăcinilor polinomului derivat se găsesc în interiorul acelui contur (sau pe contur).

Această consecință decurge prin aplicarea teoremei lui *Lucas* în raport cu fiecare latură a conturului; dacă se face o trecere la limită considerînd numărul laturilor conturului crescînd indefinit, atunci se poate exprima proprietatea în raport cu o curbă convexă închisă.

Aplicație. Să se arate că ecuația

$$ax^n + x + 1 = 0; \quad a \in C, \quad n \geqslant 2,$$

are cel puțin o rădăcină a cărei imagine în planul complex se află în interiorul sau pe circumferința cercului cu centrul în 0 și avînd raza 2.

Rezolvare

Trebuie arătat că există x rădăcină a ecuației date astfel ca $|x| \leqslant 2$.

Să facem transformarea $x = \frac{1}{z}$. Rezultă $z^n + z^{n-1} + a = 0$ și fie polinomul $P \in \mathcal{C}[z]$; $P(z) = z^n + z^{n-1} + a$ precum și polinomul derivat $P'(z) = nz^{n-1} + (n-1)z^{n-2}$.

Acesta din urmă are rădăcinile

$$z_1 = 0 \quad \text{și} \quad z_2 = \frac{1-n}{n} = \frac{1}{n} - 1$$

de unde se vede că $|z_2| = 1 - \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2}$.

De aici rezultă ceea ce se cere în problemă. Într-adevăr, dacă pentru orice rădăcină x a ecuației date am avea $|x| > 2$, ar rezulta $|z| < \frac{1}{2}$ pentru orice rădăcină a lui P, deci și pentru orice rădăcină a lui P'. Absurd!

§ 3. PROBLEME

1. Fie ecuațiile $x^2 + ax + b = 0$ și $y^2 + cy + d = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2 și respectiv y_1, y_2. Să se formeze ecuația care are rădăcinile $x_k + y_h$, $k = 1, 2$; $h = 1, 2$.

2. Dacă a, b, c sînt numere complexe astfel încît $a \cdot b \neq 0$ și $az^2 + bz + c = 0$, atunci $|z| < \frac{|b|^2 + 2|ac|}{|ab|}$.

3. Fie polinomul $P(x) = ax^2 + bx + c$ unde $a, b, c, \in \in \mathcal{C} - \{0\}$. Să se studieze dacă afirmația „$P(P(x)) \in R[x]$ oricare ar fi x" implică afirmația „$P \in R[x]$ oricare ar fi x".

4. Fie ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, unde a, b, c sînt numere complexe care îndeplinesc condițiile

$$|a| + |c| = |b|; \arg a + \arg c = 2 \arg b.$$

Să se arate că cel puțin o rădăcină a ecuației are modulul egal cu 1.

5. Fie ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ ai cărei coeficienți sînt complecși și satisfac condițiile $a \neq 0$, $a \cdot \bar{b} = \bar{c} \cdot b$, $|a| = |c| \geqslant \frac{|b|}{2}$. Să se arate că rădăcinile ecuației au modulul egal cu 1.

6. Fie numerele complexe a, b, c, a_1, b_1, c_1 unde $a \neq 0$ și $a_1 \neq 0$ și propozițiile următoare:

P_1: Ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are rădăcinile de același modul;

P_2: Ecuația $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ are rădăcinile de același modul;

P_3: Ecuația $2aa_1x^2 + bb_1x + 2cc_1 = 0$ are rădăcinile de același modul;

Se cere:

a) Să se arate că $P_1 \wedge P_2 \to P_3$;

b) Să se verifice dacă este adevărată implicația $P_1 \wedge P_3 \to P_2$.

7. Fie $\mathcal{P}_k$ mulțimea polinoamelor de gradul k avînd coeficienții complecși și de modul egal cu unu. Există pentru fiecare n și pentru fiecare polinom $P \in \mathcal{P}_n$, un polinom $P_1 \in \mathcal{P}_n$ astfel încît $P \cdot P_1 \in \mathcal{P}_{2n}$?

8. Fie numărul $n \in N$. Există polinoame $P \in \mathcal{C}[x]$ de gradul n astfel ca funcția $P : \mathbf{R} \to \mathcal{C}$ să fie injectivă?

9. Fie polinoamele P, Q, $R \in \mathcal{C}[x]$ astfel încît $P(x) + Q(x) + R(x) = 0$ oricare ar fi numărul real x. Fie, de asemenea, mulțimile de numere complexe

$A_k = \{x \in \mathcal{C} \mid P^k(x) + Q^k(x) + R^k(x) = 0\}$ unde $k \in N^*$.

Scanned with OKEN Scanner

Să se arate că:

a) $A_2 = A_4$

b) $A_3 \subset A_5 = A_7$

c) $A_2 \cup A_3 = A_5$

10. Fie ecuația $x^3 + ax^2 + bx - 1 = 0$ unde $a, b \in \mathcal{C} \setminus \mathbf{R}$ și propozițiile:

P_1: $|x_1| = |x_2| = |x_3|$;

P_2: $\mathrm{Im}(x_1x_2 + x_3) = 0$;

P_3: Numerele a și b au aceeași parte imaginară.

Se cere:

a) să se arate că este adevărată implicația $P_1 \to P_2 \wedge P_3$;

b) să se stabilească dacă este adevărată sau nu reciproca implicației de la punctul anterior.

11. Fie polinomul $P \in \mathcal{C}[x]$, $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$. Se cere să se arate că:

a) dacă rădăcinile polinomului au modulul egal cu unu, atunci $|a| = |b|$;

b) dacă, în plus, $P(1)$ este număr real atunci și numerele a, b sînt reale.

12. Dacă rădăcinile polinomului cu coeficienți complecși

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + (-1)^n$$

au același modul, atunci numărul $P(-1)$ este real.

13. Se consideră polinoamele $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathcal{C}[x]$. Să se arate că, dacă polinomul

$$P(x) = P_1(x^{n-1}) + xP_2(x^{n-1}) + \ldots + x^{n-1}P_n(x^{n+1})$$

se divide prin polinomul

$$Q(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1$$

atunci toate polinoamele P_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ se divid prin $x - 1$.

14. Fie P un polinom cu coeficienți complecși de grad cel puțin n. Să se arate că restul împărțirii polinomului P prin $(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$ este un polinom de gradul zero, dacă și numai dacă resturile împărțirii lui prin $x - a_k$ sînt egale, unde a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ sînt numere complexe diferite între ele.

Scanned with OKEN Scanner

15. Fie ecuația cu coeficienți complecși $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a \neq 0$ numerele a, b, c, d fiind în progresie aritmetică. Se cere:

a) să se arate că ecuația are cel mult o rădăcină reală;

b) să se arate că, dacă ecuația are o rădăcină reală, atunci celelalte două rădăcini sînt numere complexe conjugate.

16. Fie polinomul $P \in \mathcal{C}[x]$ de gradul 4 avînd rădăcinile în progresie aritmetică. Să se arate că și rădăcinile polinomului derivat P' sînt în progresie aritmetică.

17. Să se arate că dacă un polinom P verifică relația

$$(x + 1)P(x) - xP(x + 3) = 1$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$, atunci $P(x) \equiv 1$.

18. Fie polinomul $P \in \mathcal{C}[x]$ de gradul n, astfel încît $P(m) = \frac{m}{m + k}$ pentru $m = 0, 1, 2, \ldots, n$. Să se arate că dacă n este un număr par atunci $x_0 = n + k + 1$ este o rădăcină a polinomului P.

19. Să se găsească toate polinoamele $P \in \mathcal{C}[x]$ care satisfac condiția $[P(x)]^{n-1} = [P'(x)]^n$ oricare ar fi $x \in \mathcal{C}$.

20. Există pentru orice număr $n \in N^*$ polinoame $P \in \mathcal{C}[x]$ de gradul n, astfel încît coeficienții și rădăcinile să aibă același modul?

21. Să se găsească toate polinoamele cu coeficienți complecși P, pentru care este valabilă egalitatea $|P(x)| = 1$ oricare ar fi numărul complex x de modul egal cu unu.

22. Există polinoame neconstante $P \in \mathcal{C}[x]$ și numere $a \in \mathcal{C} \setminus \mathbf{R}$ astfel încît egalitatea $P(x) = P(ax)$ să fie valabilă oricare ar fi numărul complex x?

23. Fie polinomul $P \in \mathcal{C}[x]$ și ω o rădăcină cubică a unității ($\omega \neq 1$). Să se arate că există un polinom $Q \in \mathcal{C}[x]$ astfel încît

$$Q(x^3) = P(x) + P(\omega x) + P(\omega^2 x).$$

24. Fie numărul $k \in N$ și Q un polinom cu coeficienți complecși neidentic nul. Să se arate că polinomul P, $P'x) = (x - 1)^k Q(x)$ are cel puțin $k + 1$ coeficienți nenuli.

Scanned with OKEN Scanner

25. Fie polinomul $P \in \mathcal{C}[x]$, iar x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, rădăcinile sale. Să se arate că, dacă $|x_k| > a + b$, $k = 1, 2, \ldots, n$, unde $a \geqslant 1$ și $b > 0$, atunci este valabilă inegalitatea

$$|P(x)| > \left(\frac{b}{a+b-1}\right)^n \left|P\left(\frac{x}{a}\right)\right|$$

oricare ar fi numărul real $x \in [-a, a]$.

26. Fie P un polinom și se cere:

a) să se arate că dacă $P \in \mathbf{R}[x]$, atunci există $x_0 \in \mathbf{R}$ astfel încît este valabilă inegalitatea $|P(x_0)| \leqslant |P(x)|$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$;

b) să se verifice dacă proprietatea exprimată la punctul a) rămîne valabilă în cazul cînd $P \in \mathcal{C}[x]$;

c) să se studieze dacă, în cazul cînd $P \in Q[x]$, există un număr $x_0 \in Q$ astfel că $|P(x_0)| \leqslant |P(x)|$ oricare ar fi $x \in Q$.

27. Fie polinomul $P \in \mathcal{C}[x]$ neconstant. Se cere:

a) să se arate că există o infinitate de numere complexe z astfel încît numerele $P(z)$ să fie reale;

b) să se verifice dacă există numere reale a astfel încît numărul $P(a)$ să fie real oricare ar fi polinomul P din familia considerată.

28. Fie P un polinom cu coeficienți complecși avînd coeficientul dominant egal cu unu și rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Să se arate că, dacă există numărul $p \in N$ astfel ca mulțimile $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ și $\{x_1^p, x_2^p, \ldots, x_n^p\}$ să fie egale, atunci

$$P(x^p) = (-1)^{n(p-1)} P(x) P(\omega x) \ldots P(\omega^{p-1} x)$$

unde $\omega = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}$.

29. Să se găsească polinoamele $P \in \mathcal{C}[x]$ care au proprietatea că $P(a) \in \mathbf{R}$ dacă și numai dacă numărul a este real.

30. Se consideră ecuația $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$ ai cărei coeficienți sînt numerele complexe $a_k = b_k + ic_k$ unde $b_k, c_k \in \mathbf{R}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Se cere să se arate că rădăcinile reale ale ecuației date sînt rădăcinile reale comune ale ecuațiilor

$$b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n = 0;$$
$$c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_{n-1} x + c_n = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

31. Să se găsească un număr real nenul a pentru care ecuația

$$x^3 + (-4 + i)x^2 - (1 + i)x + a = 0$$

are o rădăcină reală.

32. Să se arate că ecuația $ax^3 + x^2 - ax + 1 = 0$ nu admite nici o rădăcină reală dacă $a \in \mathcal{C} \setminus \mathbf{R}$.

33. Să se arate că o condiție necesară ca ecuația cu coeficienți complecși

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

să aibă toate rădăcinile de modul egal cu unu este ca $|a_k| = |a_{n-k}|$, iar $\arg a_k + \arg a_{n-k} = \text{const.}$, $k = 1,2,\ldots, n$ (argumentele sînt cuprinse în intervalul $[0, 2\pi)$). Condiția este și suficientă?

34. Să se găsească o condiție necesară și suficientă pe care trebuie să o îndeplinească un polinom cu coeficienți complecși P, astfel încît $P(x + i)$ să fie un polinom cu coeficienți reali. Caz particular $n = 2$.

35. Fie polinomul cu coeficienți complecși $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ și numărul complex $r = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$. Să se arate că

$$\sum_{k=1}^{n} P(r^k) = n(a_0 + a_n).$$

36. Fie numărul $n \in N^*$ fixat și S_n mulțimea polinoamelor de forma

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + 1$$

unde coeficienții a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, sînt complecși.

Să se arate că $\min_{P \in S_n} (\max_{|x|=1} |P(x)|) = 2$.

37. Fie polinoamele $P, Q \in \mathcal{C}[x]$ astfel încît $|P(x)| = |Q(x)|$ oricare ar fi $x \in \mathcal{C}$.

a) Să se arate că $P(x) = a \cdot Q(x)$, $|a| = 1$ oricare ar fi $x \in \mathcal{C}$;

b) Dacă $|P(x)| = |Q(x)|$ pentru o infinitate de numere x, rezultă că $P(x) = a \cdot Q(x)$ oricare ar fi $x \in \mathcal{C}$?

Scanned with OKEN Scanner

38. Se dau polinoamele $P, Q \in \mathcal{C}[x]$.

a) Să se arate că dacă $|P(x)| \geqslant |Q(x)|$ oricare ar fi $x \in \mathcal{C}$, atunci $P(x) = \lambda Q(x)$, $|\lambda| \leqslant 1$ pentru orice $x \in \mathcal{C}$.

b) Să se studieze dacă din inegalitatea $|P(x)| \geqslant |Q(x)|$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, rezultă că $P(x) = \lambda Q(x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

39. Fie $f, g : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ funcții polinomiale neconstante. Știind că:

a) $f(x) = 0$ dacă și numai dacă $g(x) = 0$;

b) $f(x) = 1$ dacă și numai dacă $f(x) = 1$,

să se arate că cele două funcții sînt identice.

40. Se consideră polinomul $P \in \mathcal{C}[x]$, $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$. Să se arate că, dacă rădăcinile sale verifică inegalitatea $|x_k| \leqslant 1$ pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n$, atunci

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| < 2^n.$$

41. Se dă polinomul $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ ai cărui coeficienți sînt numere complexe care satisfac condițiile:

$$a_0 \neq 0; \quad 0 < \sum_{k=1}^{n} |a_k| = a = \text{const.} \quad \text{și} \quad a \leqslant |a_0|.$$

Să se arate că modulele rădăcinilor polinomului P sînt cuprinse în intervalul $\left[0, \frac{|a_0|}{a}\right]$.

42. Fie ecuația $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ ai cărei coeficienți sînt numere complexe care satisfac inegalitățile $|a_k| \leqslant 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Să se arate că modulele rădăcinilor sale sînt inferioare lui 2.

43. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile polinomului $P \in \mathcal{C}[x]$

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Să se arate că dacă $a_0a_n \neq 0$ și $\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 = 1$ atunci este valabilă inegalitatea $|a_n| \leqslant |x_k| \leqslant \frac{1}{|a_0|}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Scanned with OKEN Scanner

44. Să se arate că, dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile polinomului $P \in \mathcal{C}$

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

atunci

$$|x_k| \leqslant |a_1| + \sqrt{|a_2|} + \ldots + \sqrt[n]{|a_n|}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

45. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile polinomului $P \in \mathcal{C}[x]$

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

și notăm $M = \max(a_1, \sqrt{|a_2|}, \ldots, \sqrt[n]{|a_n|})$ să se arate că $|x_k| \leqslant 2M$ oricare ar fi $k = 1, 2, \ldots, n$.

46. Să se arate că, dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile polinomului $P \in \mathcal{C}$

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

și notăm $M = \max(n|a_1|, \sqrt{n|a_2|}, \ldots, \sqrt[n]{n|a_n|})$ atunci $x_k \leqslant M$ oricare ar fi $k = 1, 2, \ldots, n$.

47. Se consideră polinomul $P \in \mathcal{C}[x]$, $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_k$ unde $a_0a_n \neq 0$ și se notează cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile sale. Dacă se notează cu r și r' rădăcinile pozitive ale polinoamelor Q, respectiv R definite prin

$$Q(x) = |a_0|x^n - |a_1|x^{n-1} - \ldots - |a_n|$$
$$R(x) = |a_0|x^n + |a_1|x^{n-1} + \ldots + |a_{n-1}|x - |a_n|$$

atunci sînt adevărate inegalitățile $r' \leqslant |x_k| \leqslant r$, $k = 1, 2, \ldots, n$ (teorema lui *Kakeya*).

48. Fie polinomul $P \in \mathcal{C}[x]$, $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ pentru care $a_k \neq 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, iar rădăcinile sale sînt $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dacă se notează

$$a = \min_{k=1,2,\ldots,n} \frac{|a_k|}{|a_{k-1}|}, \quad b = \max_{k=1,2,\ldots,n} \frac{|a_k|}{|a_{k-1}|},$$

iar α este rădăcina pozitivă a ecuației $x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - x - 1 = 0$ să se arate că

$$\frac{a}{\alpha} \leqslant |x_k| \leqslant \alpha b \text{ oricare ar fi } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Scanned with OKEN Scanner

49. Dîndu-se polinomul $P \in \mathcal{C}[x]$, $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ cu rădăcinile x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, să se arate că modulele acestora satisfac inegalitățile

$$|x_j| < 1 + \max_{k=1,2,\ldots,n} \left|\frac{a_k}{a_0}\right|; \quad |x_j| < \rho + \max_{k=1,2,\ldots,n} \left|\frac{a_k}{a_0\rho^{k-1}}\right|; \quad (\rho > 0)$$

$$|x_j| < 2 \cdot \max_{k=1,2,\ldots,n} \sqrt[n]{\left|\frac{a_k}{a_0}\right|}$$

pentru orice $j = 1, 2, \ldots, n$.

50. Se consideră polinoamele $P \in \mathcal{C}[x]$, $Q \in R[x]$

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n;$$

$$Q(x) = b_0x^n - b_1x^{n-1} - b_2x^{n-2} - \ldots - b_{n-1}x - b_n$$

unde

$$0 < b_0 \leqslant |a_0|; \; b_1 \geqslant |a_1|; \; b_2 \geqslant |a_2|; \; \ldots; \; b_n \geqslant |a_n|.$$

Să se arate că modulele rădăcinilor polinomului P sînt cel mult egale cu singura rădăcină pozitivă a ecuației $Q(x) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul III

INELUL DE POLINOAME R[x]

Problematica acestui capitol privește mulțimea polinoamelor cu coeficienți reali, care este un inel de polinoame.

Dacă considerăm polinomul P din acest inel

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

și $x \in X = \mathbf{R}$ atunci funcția polinomială corespunzătoare va fi $f_P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$; $f_P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$.

Se poate considera însă $X = \mathcal{C}$ și atunci obținem funcția $g_P : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$; $g_P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ pentru care, funcția f_P reprezintă, după cum se vede, restricția ei la mulțimea $\mathbf{R}$.

§ 1. PROPRIETĂȚI

1. Fie $P(x) \in R[x]$ și $g_P : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Demonstrăm că dacă $x \in \mathcal{C}$ este un număr complex oarecare atunci, notînd cu $\bar{x}$ numărul complex conjugat cu acesta avem

$$g_P(\bar{x}) = \overline{g_P(x)}$$

(valorile funcției g_P pentru două valori complex conjugate ale nedeterminatei sînt ele însele două valori complex conjugate).

Într-adevăr, deoarece sînt adevărate egalitățile

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k = \overline{\sum_{k=1}^{n} x_k}; \quad \bar{a} = a, \ (a \in \mathbf{R})$$

$$\prod_{k=1}^{n} \bar{x}_k = \overline{\prod_{k=1}^{n} x_k}; \quad \overline{x^n} = (\bar{x})^n$$

Scanned with OKEN Scanner

avem

$$g_P(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{n} a_k (\bar{x})^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{x^{n-k}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \overline{a_k x^{n-k}} = \overline{\sum_{k=1}^{n} a_k x^{n-k}} = \overline{g_P(x)}.$$

Observație. Această proprietate ne arată în particular că, dacă pentru $x = x_0$, avem $P(x_0) = 0$, atunci $P(\bar{x}_0) = \overline{P(x_0)} = 0$. Deci dacă $P \in R[x]$ și $x = x_0$ este o rădăcină complexă[1] a lui, atunci și $x = \bar{x}_0$ este o rădăcină a lui. Rezultă că numărul de rădăcini complexe ale unui polinom $P \in R[x]$ este par și prin urmare paritatea numărului de rădăcini reale ale sale este aceeași cu paritatea gradului său.

2. Polinomul $P \in R[x]$ este divizibil prin polinomul $Q \in R[x]$ dacă și numai dacă există polinomul $C \in R[x]$ astfel încît $P = C \cdot Q$.

Dacă $P, Q \in R[x]$ atunci și cel mai mare divizor comun al lor $(P, Q) \in R[x]$.

Valabilitatea celor două afirmații este evidentă.

3. Conform teoremei fundamentale de descompunere în factori ireductibili și observațiilor de mai sus putem exprima proprietatea următoare:

Un polinom $P \in R[x]$ se descompune în mod unic într-un produs finit de factori ireductibili din $R[x]$.

În ceea ce privește factorii ireductibili din $R[x]$ vom face următoarele constatări:

a) Factorii liniari, după cum am arătat în capitolul I, sînt ireductibili în orice inel de polinoame. Așadar o primă categorie de factori ireductibili în $R[x]$ sînt factori de forma $x - a$, $a \in \mathbf{R}$.

b) Să presupunem acum că $x = x_0 \in \mathcal{C}$ este o rădăcină a polinomului $P \in R[x]$; atunci polinomul P este divizibil prin factorul liniar $x - x_0$. Dar, conform observației de la pct. 1, polinomul P are și rădăcina $x = \bar{x}_0$, deci va fi divizibil și prin factorul liniar $x - \bar{x}_0$. Cum $x - x_0$ și $x - \bar{x}_0$ sînt factori primi între ei, polinomul P va fi divizibil prin produsul lor.

---

[1] Folosim termenul de rădăcină complexă pentru orice rădăcină din $\mathcal{C} - \mathbf{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă notăm $x_0 = \alpha + \beta i$; $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, atunci $\bar{x}_0 = \alpha - \beta i$ și vom avea

$$(x - x_0)(x - \bar{x}_0) = x^2 - x(x_0 + \bar{x}_0) + x_0 \cdot \bar{x}_0 =$$

$$= x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2 = (x - \alpha)^2 + \beta^2.$$

Dar, refăcînd acest raționament în sens invers, stabilim că cele de mai sus sînt valorile și în sens reciproc, astfel încît deducem că, o a doua categorie de factori ireductibili în $R[x]$ sînt factorii de forma $(x - \alpha)^2 + \beta^2$, unde $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Cele două constatări ne arată că:

Orice polinom din R[x] *are o descompunere unică într-un produs finit de factori lineari și pătratici ireductibili.*

Aplicație. Acest rezultat este foarte util în aplicații, mai ales prin ceea ce ne dă folosindu-l în teorema de descompunere în fracții simple, care își păstrează valabilitatea și în inelul $R[x]$ sub forma următoare:

Dacă $P, Q \in R[x]$ și

$$Q(x) = (x - x_1)^{p_1}(x - x_2)^{p_2} \dots (x - x_l)^{p} [(x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2]^{q_1} \dots$$

$$\dots [(x - \alpha_s)^2 + \beta_s^2]^{q_s};$$

atunci pentru orice x pentru care $Q(x) \neq 0$ avem

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{a_{11}}{x - x_1} + \frac{a_{12}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{a_{1p_1}}{(x - x_1)^{p_1}} +$$

$$+ \frac{a_{21}}{x - x_2} + \frac{a_{22}}{(x - x_2)^2} + \dots + \frac{a_{2p_2}}{(x - x_2)^{p_2}} +$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \frac{a_{l1}}{x - x_l} + \frac{a_{l2}}{(x - x_l)^2} + \dots + \frac{a_{lp_l}}{(x - x_l)^{p}} +$$

$$+ \frac{b_{11}x + c_{11}}{(x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \frac{b_{12}x + c_{12}}{[(x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2]^2} + \dots + \frac{b_{1q_1}x + c_{1q_1}}{[(x - \alpha_1)^2 + \beta_1^2]^{q_1}} +$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+ \frac{b_{s1}x + c_{s1}}{(x - \alpha_s)^2 + \beta_s^2} + \frac{b_{s2}x + c_{s2}}{[(x - \alpha_s)^2 + \beta_s^2]^2} + \dots + \frac{b_{sq_s}x + c_{sq_s}}{[(x - \alpha_s)^2 + \beta^2]^{q_s}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Exemplu. Dacă $Q(x) = (x-1)^3 \cdot [(x-2)^2+5]^2$ atunci

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{a_{11}}{x-1} + \frac{a_{12}}{(x-1)^2} + \frac{a_{13}}{(x-1)^3} + \\ + \frac{b_{11}x + c_{11}}{(x-2)^2+5} + \frac{b_{12}x + c_{12}}{[(x-2)^2+5]^2}.$$

§ 2. PROPRIETĂȚI REFERITOARE LA EXISTENȚA RĂDĂCINILOR REALE ALE POLINOAMELOR DIN R[x]

Dacă P este un polinom din inelul $R[x]$, $x \in X = \mathbf{R}$ atunci funcția polinomială

$$f_P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}; \quad f_P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

este o funcție continuă, iar această calitate a ei are implicații esențiale asupra existenței valorilor $x \in \mathbf{R}$ în care ea se anulează.

Pentru comoditatea scrierii, vom nota în continuare cu P însăși funcția polinomială f_P corespunzătoare polinomului P.

1. Știm că dacă pentru $x = \alpha$ și $x = \beta$ două valori reale distincte ale variabilei, o funcție f continuă ia valori de semne contrare (deci $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$) atunci există cel puțin un număr real $x_0 \in (\alpha, \beta)$ în care ea se anulează.

De pildă, considerînd

$$P(x) = x^4 + (2+\sqrt{2})x^3 + (2\sqrt{2}-1)x^2 - 4\sqrt{2}x - 6$$

și observînd că

$$P(1) = -\sqrt{2} - 4 < 0; \quad P(2) = 8 + 11\sqrt{2} > 0$$

rezultă că polinomul P are cel puțin o rădăcină în $(1, 2)$.

Dacă extindem intervalul (α, β) la toată axa reală atunci deducem următoarele rezultate:

a) Un polinom de grad impar are întotdeauna cel puțin o rădăcină reală. Într-adevăr, deoarece

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = \lim_{x \to -\infty} x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right) = a_0 \cdot (-\infty)$$

Scanned with OKEN Scanner

și analog

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = a_0 \cdot \infty$$

se vede că

$$P(-\infty) \cdot P(\infty) < 0$$

și conform proprietății 1 rezultă afirmația a).

De pildă

$$P(x) = 2x^5 - \sqrt{3}x^4 + \frac{\sqrt[3]{5}}{2}x^3 - \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{7}x - \frac{4}{\sqrt[5]{2}}$$

are cel puțin o rădăcină reală. Mai mult chiar, deoarece $P(0) = -\frac{4}{\sqrt[5]{2}} < 0$ și $P(\infty) > 0$ deducem că P are cel puțin o rădăcină reală în $(0, \infty)$.

b) Un polinom de grad par, care are termenul liber de semn contrar coeficientului dominant, are cel puțin două rădăcini reale, dintre care una e pozitivă, iar cealaltă negativă.

Într-adevăr, deoarece

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = a_0 \cdot \infty;\ P(0) = a_n;\ \lim_{x\to\infty} P(x) = a_0 \cdot \infty$$

avem

$$P(-\infty) \cdot P(0) = P(0) \cdot P(\infty) = a_0 \cdot a_n \cdot \infty < 0$$

de unde rezultă că polinomul are cel puțin două rădăcini reale

$$x_1 \in (-\infty, 0) \qquad x_2 \in (0, \infty).$$

Consecință. Cele de mai sus ne arată că un polinom din $R[x]$ are cel puțin o rădăcină reală în oricare interval în care el nu păstrează un semn constant.

De aici deducem că, *dacă un polinom din* R[x] *nu are nici o rădăcină reală, atunci el păstrează semn constant pe toată axa reală.* Într-adevăr, dacă ar exista numerele α și β din **R** astfel încît $P(\alpha) \cdot P(\beta) < 0$, polinomul P ar avea, conform celor de mai înainte, cel puțin o rădăcină reală în intervalul (α, β).

Să mai adăugăm și observația următoare cu privire la polinoamele din $R[x]$ care au toate rădăcinile complexe. Potrivit prop. 1 § 1, acestea sînt perechi de numere complexe conjugate.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $Q \in R[x]$ un astfel de polinom și $x_k = \alpha_k + \beta_k i$, $\bar{x}_k = \alpha_k - \beta_k i$, $k = 1, 2, \ldots, n$ rădăcinile sale. Atunci

$$Q(x) = a_0 \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)(x - \bar{x}_k) = a_0 \prod_{k=1}^{n} (x^2 + 2\alpha_k x + \alpha_k^2 + \beta_k^2)$$

de unde se vede că termenul său liber este $a_0 \prod_{k=1}^{n} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)$ și prin urmare semnul acestuia este dat de a_0. În concluzie, *un polinom din $R[x]$ care are toate rădăcinile complexe, are în mod necesar coeficientul dominant și termenul liber de același semn.*

Acest rezultat rămîne valabil și în cazul cînd polinomul P are nu numai rădăcini complexe, dar rădăcinile sale reale sînt negative deoarece, dacă $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sînt aceste rădăcini, avem

$$P(x) = \prod_{k=1}^{p} (x - x_k) \cdot Q(x)$$

unde x_k sînt numere negative, iar $Q \in R[x]$ și are numai rădăcini complexe.

Se vede atunci că semnul termenului liber din membrul drept nu este afectat de către produsul $\prod_{k=1}^{p} (-x_k)$ deoarece acesta conține numai factori pozitivi.

2. Să presupunem acum că $x_1, x_2, \ldots, x_q$ sînt rădăcinile reale ale polinomului P. Atunci

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_q) Q(x)$$

unde $Q(x) \in R[x]$ și nu are rădăcini reale.

Fie numerele reale α și β și presupunem că avem

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_l < \alpha < x_{l+1} < \ldots < x_p < \beta < x_{p+1} < \ldots < x_q.$$

Atunci

$$P(\alpha) = (\alpha - x_1)(\alpha - x_2) \ldots (\alpha - x_q) \cdot Q(\alpha)$$
$$P(\beta) = (\beta - x_1)(\beta - x_2) \ldots (\beta - x_q) \cdot Q(\beta)$$

și deoarece

$$\alpha - x_i > 0 \text{ pentru } i = 1, 2, \ldots, l$$
$$\alpha - x_i < 0 \text{ pentru } i = l + 1, l + 2, \ldots, q$$
$$\beta - x_i > 0 \text{ pentru } i = 1, 2, \ldots, p$$
$$\beta - x_i < 0 \text{ pentru } i = p + 1, p + 2, \ldots, q$$

Scanned with OKEN Scanner

se vede că

$$\operatorname{sgn} P(\alpha) = (-1)^{q-l} \operatorname{sgn} Q(\alpha)$$
$$\operatorname{sgn} P(\beta) = (-1)^{q-p} \operatorname{sgn} Q(\beta).$$

Cum numerele $Q(\alpha)$ și $Q(\beta)$ au același semn (polinomul Q neavînd rădăcini reale) rezultă că

$$\operatorname{sgn} P(\alpha) \cdot \operatorname{sgn} P(\beta) = (-1)^{2q-l-p} = (-1)^{p+l}$$

ceea ce înseamnă că

$$\operatorname{sgn} P(\alpha) \cdot \operatorname{sgn} P(\beta) = (-1)^{p-l}$$

întrucît numerele $p + l$ și $p - l$ sînt de aceeași paritate.

Prin urmare

$$\operatorname{sgn} P(\alpha) \cdot \operatorname{sgn} P(\beta) = \begin{cases} 1 \text{ dacă } p - l = \text{număr par} \\ -1 \text{ dacă } p - l = \text{număr impar.} \end{cases}$$

În concluzie, deoarece $p - l$ reprezintă numărul de rădăcini reale ale polinomului P cuprinse între numerele α și β deducem că *numerele* $P(\alpha)$ *și* $P(\beta)$ *sînt de același semn dacă în intervalul* (α, β) *se află un număr par de rădăcini reale ale polinomului* P *și sînt de semne contrare dacă în intervalul respectiv se află un număr impar de rădăcini.*

Pentru această proprietate este valabilă și reciproca:

— dacă numerele $P(\alpha)$ și $P(\beta)$ sînt de același semn, atunci polinomul P sau nu are nici o rădăcină reală în intervalul (α, β) sau are un număr par de astfel de rădăcini;

— dacă numerele $P(\alpha)$ și $P(\beta)$ sînt de semne contrare atunci polinomul P are un număr impar de rădăcini reale în intervalul (α, β). (Se vede că acest rezultat generalizează pe cel exprimat de proprietatea 1).

3. O situație specială au în inelul $R[x]$ polinoamele particulare

$$P(x) = ax^n + b, \qquad a \neq 0, \qquad b \neq 0$$

care ne conduc la ecuații $ax^n + b = 0$, reductibile după cum se vede la forma

$$x^n + c = 0, \qquad c = \frac{b}{a} \in \mathbf{R},$$

și care se numesc *ecuații binome.*

Conform celor stabilite o astfel de ecuație are o rădăcină reală dacă gradul său este impar.

Scanned with OKEN Scanner

În plus, observînd că, pentru funcția

$$f_P(x) = x^n + c;\ f_P : \mathbf{R} \to \mathbf{R},$$

derivata este

$$f_P'(x) = nx^{n-1} \text{ cu rădăcina } x = 0$$

și care pentru orice $x \in \mathbf{R} - \{0\}$ este strict pozitivă. Atunci funcția f_P este strict crescătoare și prin urmare ea *are o rădăcină reală și numai una.*

Dacă gradul n este par atunci variația funcției f_P se prezintă ca în tabelul următor:

x	$-\infty$			0				∞
$f_P'(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f_P(x)$	∞	$\searrow$		c	$\nearrow$			∞

de unde se vede că:

— dacă $c > 0$ (adică a și b sînt de același semn) ecuația binomă nu are rădăcini reale;

— dacă $c < 0$ (a și b de semne diferite) ecuația binomă are două rădăcini reale.

În concluzie, o ecuație binomă are:

— o rădăcină reală și numai una dacă este de grad impar;

— $k \in \{0, 2\}$ rădăcini reale dacă este de grad par.

Observații

1) În cazul în care ecuația binomă are rădăcini reale ea este deci de forma

$$x^n \pm c = 0;\quad c > 0 \quad \text{dacă} \quad n = \text{impar}$$
$$x^n - c = 0;\quad c > 0 \quad \text{dacă} \quad n = \text{par}.$$

Făcînd transformarea $y = x\sqrt[n]{c}$ acestea devin

$$y^n \pm 1 = 0 \quad \text{respectiv} \quad y^n - 1 = 0.$$

Atunci, în fapt, rezolvarea ecuației binome în care $c \neq 1$ revine la rezolvarea ecuațiilor de mai sus care au rădăcinile reale în mulțimea $\{-1, 1\}$ și anume:

$$\left.\begin{array}{l} y = -1 \text{ pentru ecuația } y^n + 1 = 0 \\ y = \ \ 1 \text{ pentru ecuația } y^n - 1 = 0 \end{array}\right\} \text{ dacă } n \text{ impar}$$

$$y = \pm 1 \text{ pentru ecuația } y^n - 1 = 0 \quad \text{dacă } n \text{ par}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Rădăcinile ecuației date rezultă din acestea înmulțindu-le cu $\sqrt[n]{c}$.

2) Abordarea exhaustivă a ecuațiilor binome se face, după cum se cunoaște, cu ajutorul numerelor complexe.

§ 3. NUMĂRUL DE RĂDĂCINI REALE ALE POLINOAMELOR DIN R[x]

Problema stabilirii numărului de rădăcini reale ale unui polinom cu coeficienți reali prezintă un interes deosebit, datorită multitudinii situațiilor în care poate să apară o asemenea necesitate. Într-adevăr, există un foarte mare număr de probleme practice care ne conduc la astfel de probleme și de ecuații pentru care este nevoie mai întîi de a ști dacă ele au rădăcini reale și cîte asemenea rădăcini pot avea.

După cum se știe pentru polinoamele cu coeficienți reali, un procedeu de aflare a numărului rădăcinilor reale îl constituie utilizarea *șirului lui Rolle*.

Reamintim în ce constă acesta.

Dîndu-se polinomul $P \in R[x]$ se consideră polinomul derivat P' și ecuația

$$P'(x) = 0$$

ale cărei rădăcini reale le notăm cu $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Numărul de rădăcini reale ale polinomului dat este egal cu numărul de variații de semn din șirul

$$P(-\infty), \quad P(x_1), \quad P(x_2), \ldots, P(x_p), \quad P(\infty).$$

De pildă, dacă

$$P(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 9$$

atunci

$$P'(x) = 12x^3 - 36x + 24$$

din care rezultă ecuația $x^2 - 3x + 2 = 0$ care are rădăcinile $x_1 = 1; \; x_2 = 2$.

Șirul lui *Rolle* va fi: $P(-\infty) = -\infty; \; P(1) = 1; \; P(2) = -1; \; P(\infty) = \infty$, adică

x	$-\infty$		1		2		∞
$P(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$

și prin urmare P are trei rădăcini reale

$$x_1 \in (-\infty, 1); \; x_2 \in (1, 2); \; x_3 \in (2, \infty).$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece aplicarea acestui procedeu necesită rezolvarea unei ecuații ($P' = 0$) ne dăm ușor seama că el are totuși o sferă restrînsă de cazuri pe care le poate rezolva efectiv; de asemenea, ne dăm seama că el este inoperant în aproape toate cazurile polinoamelor care au coeficienți iraționali.

Pentru a rezolva problema numărului rădăcinilor reale ale polinomului $P \in R[x]$ se utilizează și teoremele care fac obiectul acestui paragraf, pe care le expunem în cele ce urmează.

1. *Preliminarii.* Fie un șir de numere reale nenule. Dacă două numere consecutive ale șirului sînt de același semn, spunem că între ele avem o *permanență*, iar dacă ele sînt de semne contrare spunem că între ele avem o *variație de semn* (pe scurt o *variație*).

De pildă:

a) șirul

$$1,\ 3,\ \frac{2}{5},\ -\sqrt{3},\ -7$$

are trei permanențe $(1, 3)$; $\left(3, \frac{2}{5}\right)$; $(-\sqrt{3}, -7)$ și o variație $\left(\frac{2}{5}, -\sqrt{3}\right)$;

b) șirul

$$3,\ 2,\ -\sqrt[3]{5},\ -1,\ \frac{1}{7},\ -\sqrt{5}$$

are două permanențe $(3, 2)$; $(-\sqrt[3]{5}, -1)$ și trei variații $(2, -\sqrt[3]{5})$; $\left(-1, \frac{1}{7}\right)$; $\left(\frac{1}{7}, \sqrt{5}\right)$;

c) șirul

$$2,\ \sqrt{3},\ \frac{3}{4},\ 5,\ \sqrt[3]{2}$$

are numai permanențe și nici o variație;

d) șirul

$$1,\ -3,\ \frac{1}{4}\ -\sqrt{7},\ 5,\ -\frac{3}{5}$$

are numai variații și nici o permanență.

Scanned with OKEN Scanner

Vom considera în continuare un șir de referință

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$$

format din numere reale nenule și vom da cîteva proprietăți.

a) Să presupunem că șirul conține o singură variație și anume între termenii a_k și a_{k+1}. Rezultă că în subșirul $a_0, a_1, \ldots, a_k$ vor exista numai permanențe de un anumit semn, iar în subșirul $a_{k+1}, \ldots, a_n$ vor exista numai permanențe de semn contrar celor de mai înainte. Dacă însă în șirul respectiv mai avem încă o variație, de pildă să presupunem că șirul are structura

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ \underbrace{a_k,\ a_{k+1}}_{v},\ \ldots,\ \underbrace{a_l,\ a_{l+1}}_{v},\ \ldots,\ a_n$$

atunci, conform celor de mai sus în subșirurile $a_0, a_1, \ldots, a_k$ și $a_{l+1}, \ldots, a_n$ vor exista numai permanențe și toate de același semn. Se poate verifica ușor (prin inducție) că întotdeauna cînd între termenii extremi ai șirului există un număr par de variații, aceștia au același semn și reciproc, dacă termenii extremi ai unui șir au același semn atunci între ei sînt sau numai permanențe sau un număr par de variații. În mod natural decurge că dacă într-un șir de numere reale există un număr impar de variații atunci termenii extremi sînt de semne diferite și reciproc, dacă termenii extremi ai șirului sînt de semne diferite șirul conține un număr impar de variații.

b) Între numărul de permanențe și cel de variații există o strînsă legătură deoarece, între doi termeni consecutivi ai șirului există în mod sigur sau o permanență sau o variație, iar dacă există una din ele atunci obligatoriu nu există cealaltă (se presupun și în același timp se exclud reciproc). Atunci, dacă notăm cu p numărul permanențelor și cu v numărul variațiilor din șirul dat, cum acest șir conține n cupluri de numere consecutive, rezultă că este valabilă egalitatea

$$p + v = n. \tag{1}$$

c) Să presupunem acum că în șirul dat introducem încă un termen. Fie deci a_k, a_{k+1} doi termeni consecutivi din șir și între ei introducem termenul a_l. Atunci:

— dacă între termenii a_k și a_{k+1} există o variație, în noua situație vom avea unul din cazurile.

$$\underbrace{a_k,\ a_l}_{p\quad v},\ a_{k+1}; \qquad \underbrace{a_k,\ a_l}_{v\quad p},\ a_{k+1}$$

după cum a_l este de același semn, respectiv de semn contrar cu a_k;

— dacă între termenii a_k și a_{k+1} există o permanență, în noua situație vom avea unul din cazurile:

$$\underbrace{a_k,\ a_l}_{p\quad p},\ a_{k+1}; \qquad \underbrace{a_k,\ a_l}_{v\quad v},\ a_{k+1}$$

după cum a_l este de același semn, respectiv de semn contrar cu a_k și a_{k+1}.

Deci, prin introducerea lui a_l între cei doi termeni sîntem conduși la unul din cazurile:

— dintr-o variație rezultă tot o variație (cazul a)

— dintr-o permanență sau nu rezultă nici o variație sau rezultă două variații.

În primul caz numărul total de variații din șir nu este afectat de introducerea noului termen, iar în cazul al doilea sau nu este afectat sau crește cu doi.

Extinzînd acest rezultat la cazul cînd în șir introducem mai mulți termeni (consecutivi sau neconsecutivi) deducem că în noul șir numărul de variații sau nu se schimbă sau crește cu un număr par față de cel din șirul inițial.

d) Dacă numerele $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sînt coeficienții unui polinom complet de gradul n, $P \in R[x]$

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

în mod evident lor le putem aplica toate observațiile de mai înainte. Să presupunem însă că în polinomul $P(x)$ facem transformarea $x \to -x$. Atunci, întrucît coeficienții termenilor de grad par rămîn neschimbați, iar cei ai termenilor de rang impar își schimbă semnul, rezultă că în orice cuplu de coeficienți consecutivi unul rămîne neschimbat, iar celălalt își schimbă semnul. Aceasta înseamnă că dacă inițial în cuplul respectiv am avut o permanență, ea va trece într-o variație, iar dacă am avut o variație ea va trece într-o permanență. Considerînd cuplurile de coeficienți consecutivi ce se pot forma cu toți coeficienții polinomului $P(-x)$ deducem că prin transformarea menționată perma-

Scanned with OKEN Scanner

nențele trec în variații, iar variațiile în permanențe. Rezultă că dacă v este numărul de variații ale lui $P(x)$ și v' este numărul de variații ale lui $P(-x)$ vom avea

$$v + v' = n.$$

e) Dacă polinomul de gradul n, $P(x)$ este incomplet atunci, numărul termenilor este mai mic decît $n + 1$, iar numărul cuplelor de coeficienți consecutivi mai mic decît n. În consecință în locul egalității (1) vom avea inegalitatea

$$p + v < n.$$

Conchidem că, dacă numerele reale $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sînt coeficienți ai unui polinom de gradul n, între numărul p al permanențelor, numărul v al variațiilor și n gradul polinomului există relația

$$p + v \leqslant n.$$

f) Să reluăm acum cazul în care polinomul $P(x)$ este incomplet și să presupunem că introducem termeni corespunzători în locul termenilor care lipsesc. Atunci conform proprietății 3) numărul de variații sau rămîne același sau crește cu un număr par. Aceeași observație în cazul polinomului transformat $P(-x)$. Să notăm cu v și v' numărul de variații din polinomul complet, respectiv din cel transformat, cu v_1 și v_1' numărul de variații din polinomul incomplet, respectiv din cel incomplet transformat. Atunci numărul $v + v'$ va fi mai mare decît $v_1 + v_1'$ cu un număr par și cum (conform cu d)) avem $v + v' = n$ rezultă că

$$v_1 + v_1' = n - 2k.$$

2. *Teorema lui Descartes*

Această teoremă exprimă legătura care există între numărul de rădăcini reale ale unui polinom $P \in R[x]$ și numărul de variații ale coeficienților săi. Pentru a putea aborda teorema dăm mai întîi următoarea

Lemă. Dacă $P(x)$ este un polinom cu coeficienți reali, ordonat după puterile descrescătoare ale lui x, atunci prin înmulțirea lui cu $x - \alpha$, $(\alpha > 0)$ în sistemul coeficienților produsului $(x - \alpha) \cdot P(x)$ se introduce cel puțin o variație de semn, iar dacă se introduc mai multe atunci numărul acestora este impar.

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Fie polinomul $P(x)$ scris grupînd de fiecare dată termenii consecutivi între care există numai permanențe.

De pildă polinomul

$$3x^{10} + x^8 - 4x^7 - x^6 + 5x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1$$

îl scriem

$$(3x^{10} + x^8) - (4x^7 + x^6) + 5x^4 - x^3 + (2x^2 + x + 1).$$

În cazul cel mai general vom considera deci polinomul $P(x)$ scris sub forma

$$P(x) = ax^m + \ldots + a'x^{n+1} - bx^n - \ldots - b'x^{p+1} + cx^p + \\ + \ldots \mp d_0x^{r+1} \pm dx^r \pm \ldots \pm d'x^s,$$

unde numerele $a, \ldots, a', b, \ldots, b', c, \ldots, c', d_0, d, \ldots, d'$ sînt pozitive. Am considerat deci că a este coeficientul termenului de grad cel mai mare urmat, apoi, pînă la $a'x^{n+1}$ inclusiv, de termeni ai căror coeficienți nu prezintă variații; $-bx^n$ este primul termen din scrierea lui $P(x)$ în ordinea descrescătoare a puterilor lui x al cărui coeficient prezintă o variație și este urmat pînă la $-b'x^{p+1}$ inclusiv, de termeni avînd același semn cu el; de la $-b'x^{p+1}$ la cx^p avem o nouă variație ș.a.m.d., ultimii termeni, cei de la $\pm dx^r$ pînă la $\pm d'x^s$ neprezentînd variații (ultima variație producîndu-se de la $\mp d_0x^{r+1}$ la $\pm dx^r$).

Atunci, vom avea

$$(x - \alpha) \cdot P(x) = ax^{m+1} + \ldots + a'x^{n+2} - bx^{n+1} - \\ - \ldots - b'x^{p+2} + cx^{p+1} + \ldots \mp d_0x^{r+1} \pm dx^{r+1} \pm \\ \pm \ldots \pm d'x^{s+1} - \alpha ax^m - \ldots - \alpha a'x^{n+1} + \alpha bx^m + \ldots + \alpha b'x^{p+1} - \\ - \ldots - \alpha cx^p - \ldots \pm \alpha d_0x^{r+1} \pm \alpha dx^r \mp \ldots \mp \alpha d'x^s$$

sau

$$(x - \alpha) \cdot P(x) = ax^{m+1} \ldots - (b + \alpha a')x^{n+1} \ldots + \\ + (c + \alpha b')x^{p+1} \ldots \pm (d + \alpha d_0)x^{r+1} \ldots \mp \alpha d'x^s.$$

Deoarece coeficienții termenilor ax^{m+1} și $-(b + \alpha a')x^{n+1}$ din $(x - \alpha) \cdot P(x)$ sînt de semne contrare, rezultă conform proprietății 1), că între ei există cel puțin o variație, iar dacă sînt mai multe numărul acestora este impar; cum între coeficienții termenilor ax^m și $-bx^n$ din $P(x)$ există o singură

Scanned with OKEN Scanner

variație, deducem că prin înmulțirea cu $x - \alpha$ a polinomului $P(x)$, între termenii ax^{n+1} și $-(b + \alpha a')x^{n+1}$ sau nu s-a introdus nici o variație sau sînt introduse un număr par de variații.

Considerații de același fel ne duc la concluzia că, analog, între termenii $-(b + \alpha a')x^{n+1}$ și $(c + \alpha b')x^{n+1}$ sau nu s-a introdus nici o variație, sau s-a introdus un număr par de variații, ș.a.m.d. pînă la ultimul grup de termeni, cel care în scrierea lui $P(x)$ nu mai prezintă variații (este vorba despre $\pm dx^r \pm \ldots \pm d'x^s$). La înmulțirea cu $x - \alpha$ acest grup dă în scrierea lui $(x - \alpha) \cdot P(x)$ un nou grup de termeni care prezintă un număr impar de variații. Într-adevăr, avem

$$(\pm dx^r \pm \ldots \pm d'x^s) \cdot (x - \alpha) = \pm dx^{r+1} \pm \ldots \mp \alpha d'x^s$$

de unde se vede că termenii extremi au coeficienți de semne diferite și conform aceleiași proprietăți 1) între ei există cel puțin o variație sau un număr impar de variații.

Ținînd seamă de toate cele de mai sus rezultă că prin înmulțirea lui $P(x)$ cu $x - \alpha$ am obținut un nou polinom în care față de cel inițial s-a introdus cel puțin o variație, iar dacă s-au introdus mai multe, numărul acestora este impar.

Ultima remarcă este tocmai ceea ce voiam să demonstrăm.

Cu ajutorul acestei leme putem acum să demonstrăm

Teorema lui Descartes

Dacă P(x) *este un polinom cu coeficienți reali atunci numărul rădăcinilor sale pozitive este cel mult egal cu numărul de variații ale coeficienților săi, iar dacă nu sînt egale, diferă între ele printr-un număr par.*

Fie polinomul P cu coeficienți reali și presupunem — ceea ce, evident, nu este restrictiv — că are coeficientul dominant pozitiv. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_q$ sînt toate rădăcinile sale pozitive îl vom putea scrie sub forma

$$P(x) = (x - x_1)\ (x - x_2) \ldots (x - x_q)Q(x)$$

unde Q este un polinom cu coeficienți reali al cărui coeficient dominant este pozitiv, acesta fiind chiar coeficientul dominant al polinomului P. În plus, polinomul Q nu are rădăcini pozitive, așa că rădăcinile sale vor fi sau negative, sau numere complexe. Dar, se știe (vezi consecința de la propr. 1), § 2) că în acest caz Q are termenul liber pozitiv și prin urmare,

Scanned with OKEN Scanner

el avînd coeficienții termenilor extremi de același semn, între aceștia se va afla un număr par de variații.

Cum polinomul P este de forma

$$P(x) = (x - x_1) \dots (x - x_q)Q(x)$$

rezultă, potrivit lemei demonstrate anterior că, înmulțind polinomul $Q(x)$ cu factorul $x - x_1$ se introduce cel puțin o variație și tot așa pentru înmulțirea cu fiecare din ceilalți factori $x - x_2$, ..., $x - x_q$. Rezultă că P va conține cel puțin atîtea variații cîte rădăcini pozitive are, afirmație, evident, echivalentă cu cea din teoremă. Dar, în baza aceleiași leme, am văzut că dacă un factor $x - x_k$ ($k = 1, 2, \dots, q$) introduce mai multe variații, numărul acestora este impar, așa încît numărul total de variații introduse de către produsul $(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_q)$ depinde de numărul factorilor din produs și anume, dacă acest număr este par atunci și numărul variațiilor va fi par (produs dintre un număr par și unul impar), iar dacă el este impar atunci și numărul variațiilor va fi impar (produs de două numere impare). Prin urmare, numărul total v al variațiilor coeficienților polinomului P și numărul rădăcinilor sale pozitive sînt de aceeași paritate, motiv pentru care, diferența lor este întotdeauna un număr par.

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Exemplu

Polinomul:

$$P(x) = \frac{2}{3}x^7 - \sqrt{2}x^6 - x^5 + \sqrt[3]{5}x^4 + 3x^3 - \frac{1}{7}x^2 + x - \lg 7$$

care în sistemul coeficienților

$$\frac{2}{3}, \underbrace{-\sqrt{2}, -1}, \underbrace{\sqrt[3]{5}, 3}, \underbrace{-\frac{1}{7}, 1, -\lg 7}$$

prezintă cinci variații, va avea cel mult cinci rădăcini reale pozitive.

Teorema lui *Descartes* are o seamă de consecințe care sînt foarte importante prin utilitatea lor în diferite aplicații.

a) Dacă în locul polinomului $P(x)$ considerăm polinomul transformat $P(-x)$ atunci numărul v' al variațiilor

Scanned with OKEN Scanner

coeficienților săi va reprezenta numărul maxim de rădăcini pozitive ale polinomului $P(-x)$, deci numărul maxim de rădăcini negative ale polinomului dat $P(x)$.

Conchidem că polinomul de gradul n, $P(x)$ are cel mult $v + v'$ rădăcini reale. De aici rezultă că el are cel puțin $n - (v + v')$ rădăcini complexe.

Exemple

1. Polinomul

$$P_1(x) = x^6 - \frac{1}{7}x^4 + x^3 + x - \sqrt{3}$$

are $v = 3$, deci cel mult trei rădăcini reale pozitive;

2) Coeficienții polinomului

$$P_2(x) = x^9 + 2x^8 - 7x^7 + 5x^6 - x^5 - 3x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 10$$

prezintă 5 variații de semn. El va avea cel mult 5 rădăcini pozitive. Cum numărul acestora trebuie să fie de aceeași paritate cu numărul variațiilor de semn deducem că P_2 nu poate avea decît sau 5 rădăcini pozitive, sau 3, sau una;

3) Coeficienții polinomului

$$P_3(x) = 3x^5 + 4x^4 - 2x^3 - x^2 + x + 7$$

prezintă două variații și prin urmare el are două rădăcini pozitive, sau nici una.

4) Polinomul

$$P_4(x) = x^4 + x^3 + 5x - 7$$

avînd o singură variație, va avea cel mult o rădăcină pozitivă. Cum, pe de altă parte, conform unei proprietăți cunoscute el are o rădăcină pozitivă (termenul liber este negativ, deci de semn contrar coeficientului dominant) rezultă că are o rădăcină pozitivă și numai una.

După cum am arătat, numărul de rădăcini negative ale polinomului $P(x)$ se cercetează raportîndu-ne la variațiile de semn ale coeficienților polinomului $P(-x)$.

Reluînd exemplele de mai sus vom avea:

Polinomul

$$P_1(-x) = x^6 - \frac{1}{7}x^4 - x^3 - x - \sqrt{3}$$

cu $v' = 1$, deci $P_1(x)$ cu cel mult o rădăcină reală negativă.

Scanned with OKEN Scanner

$P_1(x)$ are deci cel mult 4 rădăcini reale și cel puțin două rădăcini complexe.

$$P_2(-x) = -x^9 + 2x^8 + 7x^7 + 5x^6 + x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - x - 10$$

are 4 variații de semn deci cel mult 4 rădăcini pozitive; $P_2(x)$ va avea cel mult 4 rădăcini negative (patru, două sau nici una).

$$P_3(-x) = -3x^5 + 4x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 7$$

are 3 variații de semn deci cel mult 3 rădăcini pozitive; $P_3(x)$ va avea cel mult 3 rădăcini negative;

$$P_4(-x) = x^4 - x^3 - 5x - 7$$

are o rădăcină pozitivă și numai una; P_4 va avea o rădăcină negativă și numai una, deci două rădăcini reale (una pozitivă și una negativă și două complexe.

b) Să presupunem acum că polinomul $P(x)$ de gradul n are toate rădăcinile reale, că în mulțimea coeficienților săi există v variații și fie v' numărul de variații ale coeficienților polinomului transformat $P(-x)$. Să notăm cu p și q numărul rădăcinilor sale pozitive, respectiv al celor negative. Deoarece este valabilă identitatea

$$n - p - q = (n - v - v') + (v - p) + (v' - q)$$

atunci, în virtutea faptului presupus inițial că polinomul are numai rădăcini reale, rezultă că $n - p - q = 0$ și cum în egalitatea de mai sus nici unul din termenii membrului drept cuprinși între paranteze nu este negativ, deducem că ei trebuie să fie toți nuli. Rezultă că

$$p = v \text{ și } q = v'.$$

Putem deci spune că, *dacă un polinom* P(x) *are toate rădăcinile reale atunci numărul rădăcinilor sale pozitive este egal cu numărul de variații ale coeficienților săi, iar numărul rădăcinilor negative este egal cu numărul de variații ale coeficienților polinomului transformat* P(—x).

c) În scrierea polinomului $P(x)$ în ordinea descrescătoare a puterilor lui x să considerăm doi termeni oarecare, de pildă, $a_k x^k + a_l x^l$ unde $k \geq l + 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Să asociem cuplului de numere (a_k, a_l) numărul α care indică dacă între a_k și a_l există sau nu o variație. Prin urmare

$$\alpha = \begin{cases} 1 \text{ dacă } a_k \cdot a_l < 0 \\ 0 \text{ dacă } a_k \cdot a_l > 0. \end{cases}$$

În polinomul transformat $P(-x)$ cuplul de termeni considerat devine $a_k(-x)^k + a_l(-x)^l$ și să notăm cu α' numărul care față de acest cuplu are aceeași semnificație ca și α de mai sus.

Fie $\theta = k - l$ și se vede că $\theta \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Dacă în cuplul $a_k x^k + a_l x^l$ puterile lui x sînt consecutive avem:

$$a_{l+1}x^{l+1} + a_l x^l \text{ și deci } \theta = 1.$$

Să considerăm și cuplul corespunzător acestuia în polinomul transformat $P(-x)$. Avem

$$a_{l+1}(-x)^{l+1} + a_l(-x)^l = (-1)^l(-a_{l+1}x^{l+1} + a_l x^l)$$

și se vede că:

— dacă a_{l+1} și a_l sînt de același semn atunci

$$\alpha = 0 \text{ și } \alpha' = 1;$$

— dacă a_{l+1} și a_l sînt de semne diferite atunci $\alpha = 1$ și $\alpha' = 0$.

În acest caz rezultă că $\theta - \alpha - \alpha' = 0$.

Dacă însă termenii considerați $a_k x^k$ și $a_l x^l$ conțin puteri ale lui x nu neapărat consecutive, conform proprietății 6) avem $\theta - \alpha - \alpha' = 2k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ și prin urmare numerele $\theta - \alpha - \alpha'$ sînt nenule numai cînd între termenii $a_k x^k$ și $a_l x^l$ lipsesc termeni ai polinomului (cel puțin unul!), caz în care spunem că polinomul prezintă *lacune*.

Deoarece avem în mod evident

(1) $$n - v - v' = \Sigma(\theta - \alpha - \alpha') \text{ cu } \theta - \alpha - \alpha' = 2k \geqslant 0$$

și

$$n - p - q = (n - v - v') + (v - p) + (v' - q)$$

rezultă că $n - p - q \geqslant 2k$ deoarece $v - p \geqslant 0$ și $v' - q \geqslant 0$. Aceasta înseamnă că polinomul P are cel puțin $2k$ rădăcini complexe.

Scanned with OKEN Scanner

Să luăm acum ecuația formată cu ajutorul celor doi termeni considerați, deci

$$a_k x^k + a_l x^l = 0 \text{ de unde } a_k x^{k-l} + a_l = 0.$$

Am obținut deci ecuația binomă

$$a_k x^\theta + a_l = 0.$$

În cazul cînd $P(x)$ are o lacună între cei doi termeni, atunci $\theta \geqslant 2$ și se știe că o ecuație binomă de forma $ax^2 + b = 0$ are rădăcini complexe numai atunci cînd a și b sînt de același semn. Dacă, însă $\theta > 2$, deci dacă dintre termenii $a_k x^k$ și $a_l x^l$ lipsesc mai mulți termeni (cel puțin doi!) atunci, după cum s-a văzut, ecuația binomă are întotdeauna rădăcini complexe.

Cum numărul de variații ale acestei ecuații este $\alpha \in \{0, 1\}$ și cum numărul de rădăcini pozitive ale sale, conform teoremei lui *Descartes* este cel mult egal cu α, iar dacă este diferit atunci diferă printr-un număr par, rezultă că α reprezintă chiar numărul de rădăcini pozitive ale ecuației respective. Analog α' va reprezenta numărul de rădăcini negative ale aceleiași ecuații. În consecință numărul $\theta - \alpha - \alpha'$ ne va da numărul său de rădăcini complexe. Drept concluzie se desprinde următoarea teoremă cunoscută sub numele de

Teorema lacunelor

Fiind dat un polinom P *care prezintă lacune (dacă lipsește un singur termen atunci termenii între care se află lacuna trebuie să fie de același semn), atunci el are în mod necesar rădăcini complexe.* Numărul acestora (conform egalității 1)) este cel puțin egal cu suma numerelor care arată cîte rădăcini complexe are fiecare ecuație binomă formată cu termenii consecutivi între care se găsesc lacune.

De pildă,

$$P(x) = x^8 + 3x^4 - 2x^3 - x + 4$$

conține lacune între primul și al doilea termen, precum și între al treilea și al patrulea. Sîntem astfel conduși la următoarele ecuații binome:

$x^8 + 3x^4 = 0$ de unde $x^4 + 3 = 0$,

care are 4 rădăcini complexe;

$-2x^3 - x = 0$ de unde $2x^2 + 1 = 0$,

care are 2 rădăcini complexe.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă că polinomul dat are cel puțin 6 rădăcini complexe.

Aplicație. Dacă în scrierea ordonată a unui polinom $P(x)$ există trei termeni consecutivi ai căror coeficienți sînt în progresie geometrică, atunci ecuația $P(x) = 0$ are rădăcini complexe.

Într-adevăr, fie

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_{k+2}x^{k+2} + a_{k+1}x^{k+1} + a_k x^k + \ldots + a_0$$

cu numerele a_{k+2}, a_{k+1}, a_k în progresie geometrică de rație $q (q \in \mathbf{R})$. Deci

$$a_{k+1} = qa_{k+2};\ a_k = qa_{k+1}.$$

Se vede că avem

$$(x - q)P(x) = a_n x^{n+1} + a_{n-1}x^n + \ldots + a_{k+2}x^{k+3} + a_{k+1}x^{k+2} +$$

$$+ a^k x^{k+1} + \ldots + a_0 x - a_n q x^n - \ldots - a_{k+2}q x^{k+2} - a_{k+1}q x^{k+1} -$$

$$- a_k q x^k - \ldots - a_0 q$$

de unde observăm că în scrierea polinomului $(x - q)P(x)$ apare o lacună între termenii care conțin x^{k+3} și x^k. Conform teoremei lacunelor, polinomul $Q(x) = (x - q)P(x)$ are în mod necesar rădăcini complexe. Rezultă că și $P(x)$ are rădăcini complexe.

Exemplu. Polinoamele

$$P_1(x) = x^7 - 3x^6 + \sqrt{3}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - x^3 + 2x^2 + 10x - 4$$

$$P_2(x) = 3x^8 - 6x^5 - 3x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 10x^2 - 5x + 8$$

au rădăcini complexe, deoarece $P_1(x)$ conține termenii $\frac{1}{2}x^4$, $-x^3$, $2x^2$ care au coeficienții în progresie geometrică $(q = -2)$, iar $P_2(x)$ conține termenii $-6x^5$, $-3x^4$, $-\frac{3}{2}x^3$ care, de asemenea, au coeficienții în progresie geometrică $\left(q = \frac{1}{2}\right)$.

Observație. Rezultatul de mai sus fiind valabil și în cazul cînd $q = 1$ deducem că, dacă în scrierea ordonată a unui

Scanned with OKEN Scanner

polinom $P(x)$, trei termeni consecutivi au coeficienții egali, atunci ecuația $P(x) = 0$ are rădăcini complexe.

De pildă, ecuația

$$x^5 - 5x^4 + x^3 + x^2 + x - 9 = 0.$$

3. *Teorema Budan-Fourier*[1]

Am văzut că teorema lui *Descartes* ne pune la dispoziție o metodă de a determina limitele între care se poate afla numărul de rădăcini reale ale unui polinom $P(x) \in R[x]$. Ea nu este însă operantă în cazul unor probleme de tipul următor:

1. Cîte rădăcini reale ale ecuației

$$x^6 - 3x^5 + 7x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x - 18 = 0$$

sînt cuprinse în intervalul $(2, 5)$?

2. Cîte rădăcini reale poate avea ecuația

$$\sqrt{x-1} - \sqrt{5-x} = x - 2.$$

În acest al doilea caz condițiile $x - 1 \geqslant 0$, $5 - x \geqslant 0$ impuse simultan ne conduc la $x \in [1, 5]$. Ridicînd la pătrat și reducînd termenii se obține

$$2\sqrt{(x-1)(5-x)} = 4x - x^2$$

și cum apare condiția $4x - x^2 \geqslant 0$, deci $x \in [0, 4]$ rezultă că

$$x \in [1, 5] \cap [0, 4] = [1, 4].$$

După o nouă ridicare la pătrat și reducerea termenilor obținem ecuația

$$x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 24x + 20 = 0.$$

Prin urmare problema revine la a stabili cîte rădăcini reale ale polinomului

$$P(x) = x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 24x + 20$$

sînt cuprinse în intervalul $[1, 4]$.

---

[1] Această teoremă a fost descoperită de Budan, care a comunicat Academiei de Științe din Paris enunțul teoremei în 1803, iar demonstrația în 1811; lui Fourier îi aparține o demonstrație originală a teoremei, care, însă, este mai clară decît cea dată de Budan.

Scanned with OKEN Scanner

Cele două exemple ilustrează o întreagă categorie de probleme de tipul următor: *dîndu-se un polinom* $P(x) \in R[x]$ *să se afle numărul de rădăcini reale pe care el le poate avea într-un interval dat* (a, b).

Teorema *Budan-Fourier*, de care ne ocupăm în continuare, dă un prim răspuns la această problemă, iar pentru a o putea formula să considerăm polinomul $P(x) \in R[x]$ despre care admitem că are rădăcini reale (simple sau multiple). Fie, de asemenea, șirul derivatelor succesive ale polinomului dat

$$(1) \qquad P^{(0)}(x) = P(x),\ P'(x),\ P''(x),\ \ldots;\ P^{(n)}(x)$$

în care, evident, ultima derivată este egală cu o constantă.

Să presupunem că fixăm pentru x o valoare reală $x = x_0$ și notăm cu $W(x_0)$ numărul de variații de semn din șirul de numere,

$$P^{(0)}(x_0),\ P(x_0),\ P''(x_0) \ldots P^{(n)}(x_0)$$

fără a considera eventualii termeni nuli ai acestuia. Așa, de pildă,

— dacă pentru $x = 1$ am obține șirul de valori

$$3,\ \underbrace{2,\ -1,}\ \underbrace{4,\ -2,}\ \underbrace{-5,}\ 6$$

vom avea $w(1) = 4$;

— dacă pentru $x = 2$ am obține șirul

$$\underbrace{1,\ -3,}\ \underbrace{-2,\ 0,\ 1,}\ 3$$

vom avea $w(2) = 2$;

— dacă pentru $x = 3$ șirul prezintă numai permanențe vom avea $w(3) = 0$.

Cum la oricare număr $x \in \mathbf{R}$ îi corespunde un număr $w(x)$ și numai unul, se definește în felul acesta o funcție

$$W : \mathbf{R} \to N.$$

Funcțiile de acest tip joacă un rol esențial în demonstrarea teoremei *Budan-Fourier*, precum — după cum se va vedea — și a teoremei lui *Sturm*. Pentru acest motiv le vom studia variația mai în detaliu.

Fie deci $W : (a, b) \to \mathbf{R}$ definită ca mai sus. Să observăm mai întîi că graficul ei este format din segmente paralele la axa absciselor.

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, să considerăm mulțimea $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\}$ reprezentînd toate rădăcinile reale ale polinoamelor din șirul (1), care sînt cuprinse în intervalul (a, b) și fie subintervalul (α_1, α_2). Deoarece între α_1 și α_2 nu se mai află nici o altă rădăcină a vreunuia din polinoamele $P^{(k)}(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$, aceste polinoame își vor păstra semnele pentru $x \in (\alpha_1, \alpha_2)$. În consecință, numărul $W(x)$ va rămîne constant pentru $x \in (\alpha_1, \alpha_2)$ și analog, oricare ar fi intervalul (α_i, α_{i+1}), $i = 2, 3, \ldots, p-1$.

Putem spune deci că

$$W(x) = c_i \text{ pentru } x \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$$

cu $i = 0, 1, 2, \ldots, p$ și unde am notat $\alpha_0 = a$, $\alpha_{p+1} = b$, iar c_i sînt constante reale.

Graficul funcției va fi deci de forma (vezi fig. 1):

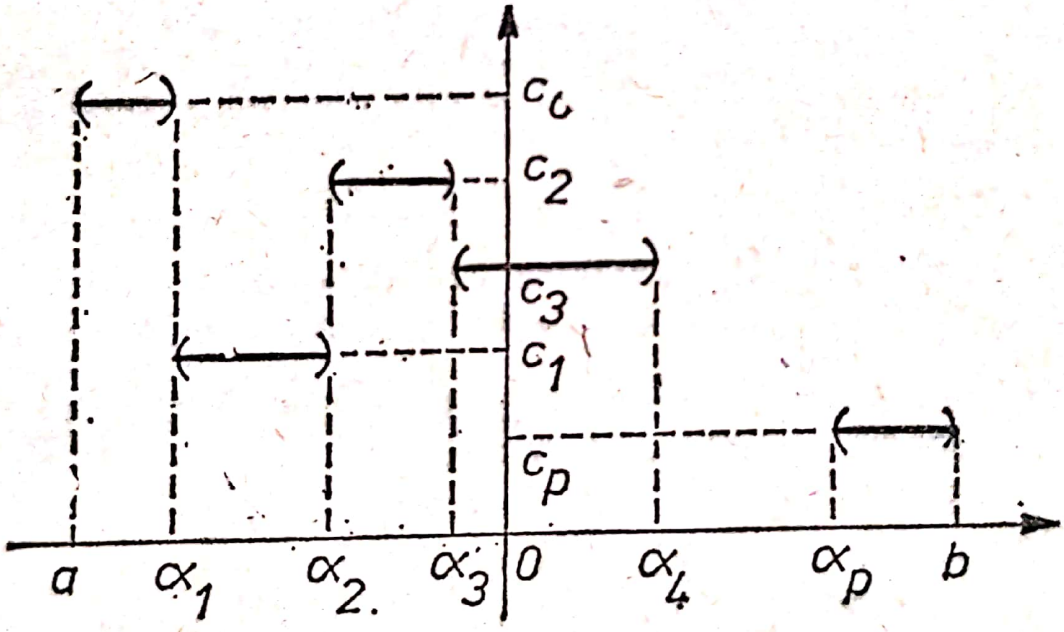

Fig. 1

Toate acestea ne arată că studiul variației funcției W revine la a studia comportamentul său în vecinătatea valorilor $\alpha_k (k = 1, 2, \ldots, p)$.

Putem acum să dăm

Teorema Budan-Fourier. Dîndu-se polinomul $P(x) \in R[x]$ și numerele a și b $(a < b)$ care nu sînt rădăcini ale sale, atunci numărul de rădăcini reale ale polinomului dat $P(x)$ cuprinse în intervalul (a, b) este mai mic sau egal cu diferența $W(a) - W(b)$, iar dacă este mai mic, diferă de aceasta printr-un număr par. (Fiecare rădăcină se consideră de atîtea ori cît este ordinul său de multiplicitate.)

Scanned with OKEN Scanner

Demonstrație. Considerăm funcția $W : (a, b) \to \mathbf{R}$ referitoare la numărul de variații de semn ale șirului

$$P^{(0)}(x),\ P^{(1)}(x),\ P^{(2)}(x),\ \ldots;\ P^{(n)}(x)$$

și în mulțimea $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\}$ a rădăcinilor reale ale polinoamelor $P^{(k)}(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ considerăm în mod arbitrar pe una din aceste rădăcini, pe care o fixăm și o notăm α_0. Numărul $x = \alpha_0$ poate să fie sau poate să nu fie rădăcină a polinomului $P(x)$. Din această cauză vom studia separat cele două cazuri..

Cazul 1. $x = \alpha_0$ *este o rădăcină a polinomului* P(x) *și fie* l *ordinul său de multiplicitate.* Atunci rezultă că

$$P(\alpha_0) = P'(\alpha_0) = \ldots = P^{(l-1)}(\alpha_0) = 0;\quad P^{(l)}(\alpha_0) \neq 0.$$

Deoarece mulțimea $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\}$ este finită putem alege o vecinătate a lui α_0, pe care o vom nota $(\alpha_0 - \varepsilon,\ \alpha_0 + \varepsilon)$ în care să nu se mai afle nici o rădăcină a polinoamelor

$$P^{(0)}(x),\ P'(x),\ P''(x)\ \ldots\ P^{(l)}(x).$$

În felul acesta polinoamele $P^{(k)}(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, l)$ își vor păstra semnele în fiecare din intervalele $(\alpha_0 - \varepsilon,\ \alpha_0]$ și $[\alpha_0,\ \alpha_0 + \varepsilon)$.

Să considerăm dintre ele un polinom $P^{(k)}(x)$ $(k=1, 2, \ldots, l)$ și vom studia următoarele cazuri:

1. $x \in (\alpha_0 - \varepsilon,\ \alpha_0]$

Atunci,

a) dacă $P^{(k)}(x) < 0$ înseamnă că în intervalul respectiv funcția polinomială $P^{(k-1)}$ este descrescătoare și deci

$$x < \alpha_0 \Rightarrow P^{(k-1)}(x) > P^{(k-1)}(\alpha_0) \quad \text{adică}$$

$$P^{(k-1)}(x) > 0.$$

b) dacă $P^{(k)}(x) > 0$, funcția polinomială $P^{(k-1)}(x)$ este crescătoare în intervalul considerat și deci

$$x < \alpha_0 \Rightarrow P^{(k-1)}(x) < P^{(k-1)}(\alpha_0) \quad \text{adică}$$

$$P^{(k-1)}(x) < 0.$$

Așadar, oricare ar fi $x \in (\alpha_0 - \varepsilon,\ \alpha_0]$ numerele corespunzătoare $P^{(k-1)}(x)$ și $P^{(k)}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, l)$ sînt de semne contrare.

Scanned with OKEN Scanner

2. $x \in [\alpha_0, \alpha_0 + \varepsilon)$

Atunci,

a) dacă $P^{(k)}(x) < 0$, $P^{(k-1)}$ este descrescătoare și

$$x > \alpha_0 \Rightarrow P^{(k-1)}(x) < P^{(k-1)}(\alpha_0) \quad \text{adică}$$

$$P^{(k-1)}(x) < 0.$$

b) dacă $P^{(k)}(x) > 0$, atunci $P^{(k-1)}(x)$ este crescătoare și

$$x > \alpha_0 \Rightarrow P^{(k-1)}(x) > P^{(k-1)}(\alpha_0) \quad \text{adică}$$

$$P^{(k-1)}(x) > 0.$$

Așadar, oricare ar fi $x \in [\alpha_0, \alpha_0 + \varepsilon)$ numerele corespunzătoare $P^{(k-1)}(x)$, $P^{(k)}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, l)$ sînt de același semn.

În concluzie, șirul de numere

$$P(x), \quad P'(x) \ldots P^{(l)}(x) \tag{2}$$

prezintă numai variații pentru $x \in (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0]$ (se vede că acestea sînt l la număr) și numai permanențe pentru $x \in [\alpha_0, \alpha_0 + \varepsilon)$. Aceasta înseamnă că la trecerea variabilei x prin valoarea α_0, șirul de numere (2) pierde l variații.

Cazul 2. Presupunem că $x = \alpha_0$ *nu este o rădăcină a polinomului* P(x). Avem, în fapt, următoarea situație. În șirul

$$P(x), \quad P'(x), \ \ldots, \ P^{(k-1)}(x), \quad P^{(k)}(x), \quad P^{(k+1)}(x), \ \ldots,$$
$$\ldots, \ P^{(k+l-1)}(x), \quad P^{(k+l)}(x), \ \ldots, \ P^{(n)}(x),$$

valoarea $x = \alpha_0$ nu anulează

$$P(x), \ P'(x), \ \ldots, \ P^{(k-1)}(x), \ P^{(k+l)}(x), \ \ldots, \ P^{(n)}(x),$$

dar anulează

$$P^{(k)}(x), \ P^{k+1}(x), \ \ldots, \ P^{(k+l-1)}(x),$$

unde $k = 1, 2, \ldots, n-1$ și $l = 1, 2, \ldots$

Fie o valoare k fixată și să notăm

$$Q(x) = P^{(k)}(x).$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci, deoarece

$$Q(\alpha_0) = Q'(\alpha_0) = \ldots = Q^{(l-1)}(\alpha_0) = 0 \text{ și } Q^{(l)}(\alpha_0) \neq 0$$

polinomului Q îi putem aplica rezultatul stabilit în cazul 1, încît deducem că, la trecerea lui x prin valoarea α_0, în șirul

$$P^{(k)}(x),\ P^{(k+1)}(x),\ \ldots,\ P^{(k+l-1)}(x),\ P^{(k+l)}(x)$$

se pierd l variații.

Dacă însă, între $P^{(k-1)}(x)$ și $P^{(k)}(x)$ s-a produs o variație la trecerea lui x prin valoarea $x = \alpha_0$, atunci, conform proprietății, numărul total de variații sau nu se schimbă sau se micșorează. Cum însă la trecerea lui x prin valoarea α_0, polinoamele $P^{(k-1)}(x)$ și $P^{(k+l)}(x)$ își păstrează semnele deducem (conform proprietății amintite) că numărul total de variații nu poate scădea decît cu un număr par.

În concluzie, considerînd rădăcinile polinomului $P(x)$, fiecare luată de atîtea ori cît indică ordinul său de multiplicitate, la trecerea lui x prin ele numărul de variații $W(x)$ din șirul (1) sau scade pentru fiecare cu un număr egal cu ordinul său de multiplicitate, sau scade cu un număr par.

În felul acesta, numărul de rădăcini ale polinomului $P(x)$ cuprinse într-un interval dat (a, b) este egal cu diferența $W(a) - W(b)$, sau este mai mic decît acesta cu un număr par. Tocmai ceea ce era de demonstrat.

4. *Teorema lui Sturm*

Toate teoremele date pînă aici *(Rolle, Descartes, Budan-Fourier)* deși se referă la numărul rădăcinilor reale ale unui polinom, nu rezolvă totuși în general satisfăcător această problemă deoarece, fie că ele nu indică numărul exact al acestor rădăcini cum se întîmplă în cazul teoremelor *Descartes* și *Budan-Fourier*, fie că sîntem conduși la noi ecuații pe care de cele mai multe ori, nu le putem rezolva (utilizarea șirului lui *Rolle)*. Teorema lui *Sturm*, de care ne ocupăm în continuare răspunde exact la întrebarea: cîte rădăcini reale are un polinom cu coeficienți reali într-un interval dat (a, b)?

Pentru a da această teoremă, mai întîi avem nevoie de cîteva preliminarii.

Fie polinomul $P(x) \in R[x]$ și fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile sale cu ordinul de multiplicitate respectiv $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Dacă a este coeficientul dominant atunci putem scrie

$$P(x) = a(x - x_1)^{p_1}(x - x_2)^{p_2} \ldots (x - x_n)^{p_n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum

$$P'(x) = a\,[p_1(x-x_1)^{p_1-1}(x-x_2)^{p_2}\ldots(x-x_n)^{p_n} +$$
$$+ p_2(x-x_1)^{p_1}(x-x_2)^{p_2-1}(x-x_3)^{p_3}\ldots(x-x_n)^{p_n} + \ldots +$$
$$+ p_h(x-x_1)^{p_1}\ldots(x-x_{n-1})^{p_{n-1}}(x-x_n)^{p_n-1}] =$$
$$= a(x-x_1)^{p_1-1}(x-x_2)^{p_2-1}\ldots(x-x_n)^{p_n-1}[p_1(x-x_2)(x-x_3)\ldots$$
$$\ldots(x-x_n) + p_2(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n) + \ldots +$$
$$+ p_n(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})]$$

se vede că c.m.m.d.c. al polinoamelor P și P' este

$$Q(x) = a(x-x_1)^{p_1-1}(x-x_2)^{p_2-1}\ldots(x-x_n)^{p_n-1}.$$

Rezultă că împărțind polinomul $P(x)$ la $Q(x)$ obținem

$$P^*(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

un polinom care are coeficientul dominant egal cu 1, iar toate rădăcinile sale sînt simple.

Aceasta ne dă posibilitatea ca toate considerațiile pe care le facem în continuare să le referim la un polinom care are toate rădăcinile simple. Fie deci, în cele ce urmează, $P(x)$ un astfel de polinom.

Definiție. Dîndu-se polinomul $P(x)$ numim *șir (sistem) Sturm* asociat acestuia șirul finit de polinoame cu coeficienți reali și diferite de zero:

$$P_0(x) = P(x),\ P_1(x),\ P_2(x),\ \ldots,\ P_s(x)$$

satisfăcînd următoarele condiții:

1) Oricare două polinoame consecutive $P_i(x)$ și $P_{i+1}(x)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, s-1)$ nu au rădăcini comune;

2) polinomul $P_s(x)$ — ultimul polinom al șirului — nu are rădăcini reale (deci el păstrează semn constant);

3) dacă $x = x_0$ este o rădăcină a unui polinom $P_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, s-1)$ atunci polinoamele $P_{i-1}(x)$ și $P_{i+1}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, s-1)$ care-l încadrează pe acesta iau pentru $x = x_0$ valori de sume contrare. Deci,

$$P_i(x_0) = 0 \Rightarrow P_{i-1}(x_0)\cdot P_{i+1}(x_0) < 0,\ i = 1, 2, \ldots, s-1.$$

Scanned with OKEN Scanner

4) considerînd polinomul $Q(x) = P_0(x) \cdot P_1(x)$ și $x = x_0$ o rădăcină a lui $P(x)$ atunci, dacă $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ este o vecinătate suficient de mică a lui x_0 avem:

$$Q(x) < 0 \quad \text{pentru} \quad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$$

$$Q(x) > 0 \quad \text{pentru} \quad x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$$

cu alte cuvinte, dacă x trece crescător printr-o valoare care reprezintă o rădăcină a lui $P(x)$, atunci și $Q(x)$ variază crescător.

Lemă. Oricare ar fi polinomul $P(x) \in R[x]$, există un șir *Sturm* asociat lui.

Demonstrația lemei o dăm construind efectiv un asemenea șir.

Fie deci $P(x)$ avînd numai rădăcini simple și luăm

$$P_0(x) = P(x); \; P_1(x) = P'(x)$$

aplicăm pentru P și P' teorema de împărțire cu rest și obținem:

$$P(x) = P'(x) \cdot Q_1(x) + R_1(x)$$

sau

$$P_0(x) = P_1(x) \cdot Q_1(x) + R_1(x).$$

Vom considera drept polinom $P_2(x)$ al șirului *Sturm* pe care-l construim, polinomul

$$P_2(x) = -R_1(x)$$

Aplicînd apoi aceeași teoremă pentru P_1 și P_2 avem:

$$P_1(x) = P_2(x)\, Q_2(x) + R_2(x)$$

și vom considera

$$P_3(x) = -R_2(x).$$

Vom continua cu acest procedeu care, în fapt, nu este altceva decît algoritmul lui *Euclid* aplicat polinoamelor P și P' și considerînd de fiecare dată restul luat cu semnul minus. Deoarece aplicarea algoritmului conduce la un număr finit de pași în final vom obține:

$$P_{s-2}(x) = P_{s-1}(x) Q_{s-1}(x) + R_{s-1}(x)$$

și luăm

$$P_s(x) = -R_{s-1}(x).$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum la fiecare împărțire gradele polinoamelor $P_i(x)$ scad, ultimul rest $R_{s-1}(x)$ va fi o constantă, care nu poate fi zero deoarece am presupus că P nu are rădăcini multiple.

Prin urmare avem

$$P_i(x) = P_{i+1}(x)\, Q_{i+1}(x) - P_{i+2}(x), \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s-2$$

de unde se vede că fiecare polinom din șir, începînd cu al treilea este bine determinat prin precedentele două polinoame.

Demonstrăm că șirul astfel obținut

$$P_0(x),\ P_1(x) \ldots P_s(x)$$

este un șir *Sturm*.

Într-adevăr,

a) Nu există în șir polinoame consecutive care să aibă rădăcini comune; în caz contrar, dacă două din ele, de pildă P_{l+1} și P_{l+2}, ar avea o rădăcină comună, aceasta ar fi, conform relației de definiție, rădăcină și pentru P_l, apoi și pentru P_{l-1} ș.a.m.d. În final ar rezulta că aceasta este o rădăcină comună pentru P și P' ceea ce este echivalent cu a spune că P are rădăcini multiple, contrar cerinței pe care am impus-o lui P de a avea numai rădăcini simple.

b) Polinomul $P_s(x)$, după cum am menționat este o constantă, deci păstrează semn constant.

c) Deoarece

$$P_i(x) = P_{i+1}(x)\, Q_{i+1}(x) - P_{i+2}(x) \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s-2)$$

dacă $x = x_0$ este o rădăcină a lui P_{i+1} avem $P_{i+1}(x_0) = 0$ și

$$P_i(x_0) = -P_{i+2}(x_0)$$

adică numerele $P_i(x_0)$ și $P_{i+2}(x_0)$ sînt de semne contrare.

d) Fie x_0 o rădăcină a lui P și $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ o vecinătate a lui x_0 în care nu se mai găsesc rădăcini ale polinomului P. Atunci pentru studierea semnului polinomului $Q(x) = P(x) \cdot P'(x)$ în această vecinătate vom avea două cazuri, după cum P este o funcție crescătoare sau descrescătoare

Scanned with OKEN Scanner

în intervalul respectiv. Rezultatele sînt cele din tabelele următoare

x	$x_0-\varepsilon$	x_0	$x_0+\varepsilon$
$P(x)$	$-$	$-0+$	$+$
$P'(x)$	$+$	$+$	$+$
$Q(x)$	$-$	$-0+$	$+$

x	$x_0-\varepsilon$	x_0	$x_0+\varepsilon$
$P(x)$	$+$	$+0-$	$-$
$P'(x)$	$-$	$-$	$-$
$Q(x)$	$-$	$-0+$	$+$

de unde se vede că, dacă x trece crescător prin x_0, valorile polinomului $Q(x)$ variază crescător.

Am dovedit deci că prin procedeul de mai sus se poate construi un șir *Sturm* pentru polinomul dat P. Facem mențiunea că șirul acesta nu este unicul șir *Sturm* ce se poate atașa polinomului P.

Observație. Se vede din cele de mai sus că alegînd $P_0(x) = P(x)$ și $P_1(x) = P'(x)$ condiția 4) din definiția șirului *Sturm* este automat satisfăcută. Ca o consecință vom preciza că și în situațiile în care șirul *Sturm* pe care-l atașăm unui polinom P este construit de o altă manieră, condiția 4) este automat satisfăcută dacă $\operatorname{sgn} P_1(x_0) = \operatorname{sgn} P'(x_0)$, x_0 fiind o rădăcină a lui P. Aceasta este foarte util în aplicații.

Vom considera în cele ce urmează un șir *Sturm*

$$P_0(x),\ P_1(x),\ \ldots,\ P_s(x) \tag{1}$$

atașat polinomului P și precum în cazul teoremei *Budan-Fourier*, definim o funcție

$$V : \mathbf{R} \to N$$

funcția care la orice valoare reală x îi pune în corespondență numărul de variații din șirul corespunzător de numere dat de șirul *Sturm* de mai sus.

Teorema lui Sturm afirmă că, fiind dat un polinom cu coeficienți reali P(x) *și numerele reale* a *și* b (a < b) *care nu sînt rădăcini ale polinomului, atunci* V(a) > V(b), *iar diferența* V(a) — V(b) *reprezintă numărul de rădăcini reale ale polinomului dat, conținute în intervalul* (a, b).

Demonstrația teoremei revine, ca și în cazul teoremei *Budan-Fourier* la studiul variației funcției V, studiu care, după cum s-a văzut, constă în a cerceta comportamentul său în vecinătatea valorilor $\alpha_k (k = 1, 2, \ldots, p)$, valori care reprezintă rădăcinile reale ale polinoamelor din șirul *Sturm* (1). Să considerăm deci una din rădăcini pe care o fixăm

Scanned with OKEN Scanner

și o notăm cu α_0. Vom distinge în mod evident două cazuri și anume:

a) $x = \alpha_0$ nu este o rădăcină a polinomului $P(x)$;

b) $x = \alpha_0$ este o rădăcină a polinomului $P(x)$

și studiem ce se întîmplă cu funcția V în fiecare din cele două cazuri.

Cazul a). Deoarece $x = \alpha_0$ nu este o rădăcină a polinomului $P(x)$, ea va fi o rădăcină a unuia din polinoamele $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_s(x)$ și să-l notăm pe acel polinom cu $P_k(x)$.

Așadar, $P_k(\alpha_0) = 0$ și conform condiției 1) din definiția polinoamelor *Sturm* avem $P_{k-1}(\alpha_0) \neq 0$ și $P_{k+1}(\alpha_0) \neq 0$.

Mai mult chiar, conform condiției 3) din aceeași definiție, numerele $P_{k-1}(\alpha_0)$ și $P_{k+1}(\alpha_0)$ au semne diferite.

Dacă presupunem, de pildă că, $P_{k-1}(\alpha_0) < 0$ atunci $P_{k+1}(\alpha_0) > 0$ și cum polinoamele sînt funcții continui există o vecinătate a lui α_0, să zicem $(\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon)$ în care cele două polinoame P_{k-1} și P_{k+1} își păstrează semnele.

Prin urmare

$$P_{k-1}(x) < 0; \quad P_{k+1}(x) > 0 \quad \text{pentru} \quad x \in (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon).$$

Considerînd acum polinoamele

$$P_{k-1}(x), \quad P_k(x), \quad P_{k+1}(x), \quad k = 1, 2, \ldots, s-1$$

afirmăm că oricare ar fi $x \in (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon)$ cele trei numere rezultate vor prezenta o singură variație de semn.

Într-adevăr, situațiile pe care le putem avea sînt cele ilustrate în tabelele următoare:

x	$P_{k-1}(x)$	$P_k(x)$	$P_{k+1}(x)$
$x \in (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0)$	$-$	$-$	$+$
$x = \alpha_0$	$-$	0	$+$
$x \in (\alpha_0, \alpha_0 + \varepsilon)$	$-$	$+$	$+$

x	$P_{k-1}(x)$	$P_k(x)$	$P_{k+1}(x)$
$x \in (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0)$	$-$	$+$	$+$
$x = \alpha_0$	$-$	0	$+$
$x \in (\alpha_0, \alpha_0 + \varepsilon)$	$-$	$-$	$+$

și se vede că oricare ar fi $x \in (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon)$ între numerele $P_{k-1}(x), P_k(x), P_{k+1}(x)$ există o singură variație.

Scanned with OKEN Scanner

Evident, lucrurile se prezintă similar dacă am fi presupus că $P_{k-1}(\alpha_0) > 0$ și $P_{k+1}(\alpha_0) < 0$, încît ne dăm seama că dacă x parcurge intervalul $(\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon)$, numărul de variații din șirul de numere

$$P_{k-1}(x), \quad P_k(x), \quad P_{k+1}(x)$$

nu se schimbă.

Dar cum pentru $x = \alpha_0$ toate celelalte polinoame din sistemul *Sturm* își păstrează semnul, iar rădăcina fixată $x = \alpha_0$ a fost luată arbitrar, rezultă că

la trecerea lui x *prin oricare valoare* $\alpha_k (k = 1, 2, \ldots, p)$ *reprezentînd o rădăcină a unuia din polinoamele Sturm* $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_s(x)$, *numărul* $V(x)$ *rămîne neschimbat.*

Cazul b). Presupunem că $x = \alpha_0$ este o rădăcină a însuși polinomului dat $P(x)$. Cum în sistemul *Sturm* polinoamele $P(x) = P_0(x)$ și $P_1(x)$ sînt consecutive, conform condiției 1) valoarea $x = \alpha_0$ nu va fi rădăcină pentru $P_1(x)$, deci $P_1(x_0) \neq 0$. Atunci există o vecinătate $(\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon)$ a lui α_0 în care $P_1(x)$ își păstrează semnul, deci $P_1(x) > 0$ sau $P_1(x) < 0$ oricare ar fi $x \in (\alpha_0 - \varepsilon_0, \alpha_0 + \varepsilon)$. Dar, conform condiției 4) din definiția șirului *Sturm*, dacă vecinătatea $(\alpha_0, - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon)$ este suficient de mică avem:

$$P_0(x) \cdot P_1(x) < 0 \text{ pentru } x \in (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0)$$

$$P_0(x) \cdot P_1(x) > 0 \text{ pentru } x \in (\alpha_0, \alpha_0 + \varepsilon).$$

Rezultă că, dacă $x \in (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon)$ putem avea una din situațiile:

x	$P(x)$	$P_1(x)$
$x \in (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0)$	$-$	$+$
$x = \alpha_0$	0	$+$
$x \in (\alpha_0, \alpha_0 + \varepsilon)$	$+$	$+$

x	$P(x)$	$P_1(x)$
$x \in (\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0)$	$+$	$-$
$x = \alpha_0$	0	$-$
$x \in (\alpha_0, \alpha_0 + \varepsilon)$	$-$	$-$

ceea ce ne arată că prin trecerea lui x din intervalul $(\alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0]$ în intervalul $[\alpha_0, \alpha_0 + \varepsilon)$ se pierde o variație. Aceasta înseamnă că la trecerea lui x prin valoarea α_0 reprezentînd o rădăcină a polinomului dat $P(x)$, numărul $V(x)$ scade cu o unitate.

În concluzie, dacă x parcurge intervalul (a, b) numărul $V(x)$ va scădea cu cîte o unitate la trecerea lui x prin fiecare

Scanned with OKEN Scanner

valoare din intervalul respectiv, care reprezintă o rădăcină a polinomului dat $P(x)$. Aceasta echivalează cu cele afirmate în teorema lui *Sturm*.

Să mai observăm că dacă considerăm $(a, b) = (-\infty, \infty)$ atunci conform teoremei lui *Sturm*, diferența $V(-\infty) - V(\infty)$ indică numărul de rădăcini reale ale polinomului dat.

Exemplu. Să se afle numărul de rădăcini reale ale polinomului

$$P(x) = x^6 - 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 6x - 18,$$

iar apoi să se precizeze cîte dintre aceste rădăcini se găsesc cuprinse în intervalul $(-1, 2)$.

Avem

$$P_0(x) = P(x) = x^6 - 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 6x - 18$$

$$P'(x) = 6x^5 - 12x^3 + 6x^2 - 6x + 6$$

și cum un factor pozitiv nu afectează semnul, vom lua

$$P_1(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 - x + 1.$$

În continuare aplicăm algoritmul lui *Euclid* pentru polinoamele P_0 și P_1

$$\begin{array}{r|l} x^6 - 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 6x - 18 & x^5 - 2x^3 + x^2 - x + 1 \\ \hline -x^6 + 2x^4 - x^3 + x^2 - x & x \\ \hline / \quad -x^4 + x^3 - 2x^2 + 5x - 18 & \end{array}$$

Vom lua, conform celor arătate,

$$P_2(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x + 18.$$

Apoi,

$$\begin{array}{r|l} x^5 - 2x^3 + x^2 - x + 1 & x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x + 18 \\ \hline -x^5 + x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 18x & x + 1 \\ \hline / \quad x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 19x + 1 & \\ \hline -x^4 + x^3 - 2x^2 + 5x - 18 & \\ \hline / \quad -3x^3 + 4x^2 - 14x - 17 & \end{array}$$

deci

$$P_3(x) = 3x^3 - 4x^2 + 14x + 17.$$

Scanned with OKEN Scanner

În continuare

$$\begin{array}{r|l|l} 3 & x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x + 18 & 3x^3 - 4x^2 + 14x + 17 \\ \hline & 3x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 15x + 54 & x + 1 \\ & -3x^4 + 4x^3 - 14x^2 - 17x & \\ \hline & / \quad 3 \mid x^3 - 8x^2 - 32x + 54 & \\ & \quad 3x^3 - 24x^2 - 96x + 162 & \\ & \quad -3x^3 + 4x^2 - 14x - 17 & \\ \hline & \quad / \quad -20x^2 - 110x + 145 & \end{array}$$

și cum, de această dată, restul este

$$-20x^2 - 110x + 145$$

vom considera drept polinom al șirului *Sturm*

$$P_4(x) = 4x^2 + 22x - 29$$

(restul cu semn schimbat și făcînd abstracție de factorul pozitiv 5).

Mai departe,

$$\begin{array}{r|l|l} 4 & 3x^3 - 4x^2 + 14x + 17 & 4x^2 + 22x - 29 \\ \hline & 12x^3 - 16x^2 + 56x + 68 & 3x - 41 \\ & -12x^3 - 66x^2 + 87x & \\ \hline & / \quad 2 \mid -82x^2 + 143x + 68 & \\ & \quad -164x^2 + 286x + 136 & \\ & \quad 164x^2 + 902x - 1189 & \\ \hline & \quad / \quad 1188x - 1053 & \end{array}$$

Din împărțirea ultimului rest la 27 și luîndu-l cu semn schimbat vom avea

$$P_5(x) = -44x + 39.$$

În sfîrșit

$$\begin{array}{r|l|l} 11 & 4x^2 + 22x - 29 & -44x + 39 \\ \hline & 44x^2 + 242x - 319 & -x - 281 \\ & -44x^2 + 39x & \\ \hline & / \quad 44 \mid 281x - 319 & \\ & \quad 12364x - 14036 & \\ & \quad -12364x + 10959 & \\ \hline & \quad / \quad \quad -3077 & \end{array}$$

și prin urmare

$$P_6(x) = 3077.$$

Scanned with OKEN Scanner

Şirul *Sturm*, în acest caz, va fi

$$P_0(x) = x^6 - 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 6x - 18$$
$$P_1(x) = x - 2x^3 + x^2 - x + 1$$
$$P_2(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x + 18$$
$$P_3(x) = 3x^3 - 4x^2 + 14x + 17$$
$$P_4(x) = 4x^2 + 22x - 29$$
$$P_5(x) = -44x + 39$$
$$P_6(x) = 3077$$

şi vom avea

x	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	$P_6(x)$
$-\infty$	+	−	+	−	+	+	+
∞	+	+	+	+	+	−	+

Aşadar, $V(-\infty) = 4$; $V(\infty) = 2$; rezultă că polinomul dat are două rădăcini reale.

Pentru a afla cîte din aceste rădăcini se găsesc în intervalul $(-1, 2)$ folosim următorul tabel

x	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	$P_6(x)$
-1	−	+	+	−	−	+	+
2	+	+	+	+	+	−	+

de unde se vede că $V(-1) = 3$; $V(2) = 2$ şi prin urmare în intervalul $(-1, 2)$ se află o singură rădăcină reală a polinomului.

§ 4. MARGINILE RĂDĂCINILOR POLINOAMELOR DIN R[x]

Există un foarte mare număr de probleme în care, din diferite motive (inclusiv acela că nu le putem calcula), nu ne preocupăm de aflarea efectivă a rădăcinillor unui polinom $P \in R[x]$, ci ne mulţumim a determina intervale (în cazul rădăcinilor reale) sau regiuni plane (în cazul rădăcinilor complexe) în care se află punctele care corespund acestora.

Știm, de pildă, că un mod de a stabili intervalele în care se găsesc rădăcinile reale ni-l dă șirul lui *Rolle* la care ne-am referit și pe care am văzut ce impedimente îl pot face inaplicabil.

Ne vom ocupa în cuprinsul acestui paragraf de o seamă de alte teoreme care se referă la problema marginilor rădăcinilor.

Înainte de aceasta vom preciza că:

a) în cazul rădăcinilor reale problema marginilor se pune efectiv pentru ele deci ne interesează intervale de pe axa reală care le conțin;

b) în cazul rădăcinilor complexe problema marginilor se pune pentru modulele acestor rădăcini; aceasta înseamnă că ne interesează a determina două numere pozitive m, M astfel ca

$$0 \leqslant m < |x_k| < M \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

ceea ce ne arată că, în fapt, determinăm o coroană circulară cu centrul în origine, care conține toate punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ care au afixele $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

1. Să considerăm polinomul de referință $P \in R[x]$

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Conform proprietății 2, § 2, cap. II, o margine superioară a modulelor rădăcinilor unui polinom $P \in R[x]$ este numărul

$$1 + \frac{M}{|a_0|}$$

unde a_0 este coeficientul dominant, iar M este cea mai mare dintre valorile absolute ale numerelor reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

2. *Teoremă.* Fie $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ un polinom cu toți coeficienții pozitivi, iar $x_1, x_2, \ldots x_n$ rădăcinile sale. Atunci:

a) dacă $0 < a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ rădăcinile satisfac $|x_k| > 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$;

b) dacă $a_0 > a_1 > a_2 > \ldots > a_n$ rădăcinile satisfac $|x_k| < 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Teorema ne spune că dacă șirul coeficienților este crescător atunci toate rădăcinile polinomului sînt situate în afara cercului unitate, iar dacă șirul coeficienților este descrescător rădăcinile sînt situate în interiorul acestui cerc.

Cît privește demonstrarea teoremei, să observăm mai întîi că, dacă în $P(x)$ facem transformarea

$$x = \frac{1}{y} \text{ obținem}$$

$$P\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y^n}(a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n)$$

și notînd

$$Q(y) = a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \ldots + a y + a_0$$

polinomul $Q(y)$ are rădăcinile $y_k = \frac{1}{x_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Conform afirmației a) din teoremă, dacă $a_n < a_{n-1} < \ldots$ $\ldots < a_1 < a_0$, rădăcinile y_k vor satisface $|y_k| > 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ deci $|x_k| < 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, ceea ce reprezintă tocmai afirmația b) din teoremă. În felul acesta va fi suficient să demonstrăm doar afirmația a). Pentru aceasta să considerăm numerele:

$$b_0 = a_0;\ b_k = a_k - a_{k-1}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

care, deoarece coeficienții $a_0, a_1, \ldots, a_n$ formează un șir crescător, vor fi pozitive.

Să mai observăm că

$$\sum_{j=0}^{k} b_j = b_0 + \sum_{j=1}^{k} b_j = a_0 + \sum_{j=1}^{k} (a_j - a_{j-1}) = a_k$$

încît polinomul $P(x)$ se va scrie

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{k} b_j\right) x^{n-k}.$$

Vom demonstra prin reducere la absurd că $P(x)$ are toate rădăcinile în modul mai mari ca 1.

Mai întîi să observăm că polinomul $P(x)$ avînd toți coeficienții pozitivi nu poate avea rădăcina $x = x_0 = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Să presupunem deci că x_0 este o rădăcină și $|x_0| \leqslant 1$. Avem

$$P(x_0) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k} b_j\right) x_0^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (b_0 + b_1 + \ldots + b_k)\, x_0^{n-k} =$$

$$= b_0 x_0^n + (b_0 + b_1) x_0^{n-1} + (b_0 + b_1 + b_2) x_0^{n-2} + \ldots +$$

$$+ (b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-1}) x_0 + (b_0 + b_1 + \ldots b_n) =$$

$$= b_0(x_0^n + x_0^{n-1} + \ldots + x_0 + 1) + b_1(x_0^{n-1} + x_0^{n-2} + \ldots + x_0 + 1) + \ldots +$$

$$+ b_{n-1}(x_0 + 1) + b_n = \sum_{j=0}^{n} b_j (1 + x_0 + \ldots + x_0^{n-j}) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} b_j \frac{1 - x_0^{n-j+1}}{1 - x_0} = \frac{1}{1 - x_0}\left(\sum_{j=0}^{n} b_j - \sum_{j=0}^{n} b_j x_0^{n-j+1}\right).$$

Dar $P(x_0) = 0$ și prin urmare

$$\sum_{j=0}^{n} b_j = \sum_{j=0}^{n} b_j x_0^{n-j+1} \qquad (1)$$

și cum coeficienții b_j sînt pozitivi vom avea

$$\sum_{j=0}^{n} b_j = \left|\sum_{j=0}^{n} b_j\right| = \left|\sum_{j=0}^{n} b_j x_0^{n-j+1}\right| \leqslant \sum_{j=0}^{n} |b_j x_0^{n-j+1}| =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} b_j |x_0|^{n-j+1}.$$

Așadar,

$$\sum_{j=0}^{n} b_j \leqslant \sum_{j=0}^{n} b_j |x_0|^{n-j+1}$$

de unde se vede că, din presupunerea făcută $|x_0| \leqslant 1$, se exclude cazul $|x_0| < 1$.

Dacă admitem $|x_0| = 1$ atunci putem considera, de pildă,

$$x_0 = \cos\theta + i \sin\theta$$

și vom avea, conform egalității (1),

$$\sum_{j=0}^{n} b_j = \sum_{j=0}^{n} b_j (\cos\theta + i \sin\theta)^{n-j+1} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} b_j [\cos(n - j + 1)\theta + i \sin(n - j + 1)\theta] =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} b_j \cdot \cos(n - j + 1)\theta + i \sum_{j=0}^{n} b_j \cdot \sin(n - j + 1)\theta$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă că

$$\sum_{j=0}^{n} b_j = \sum_{j=0}^{n} b_j \cos(n-j+1)\theta$$

$$\sum_{j=0}^{n} b_j \sin(n-j+1)\theta = 0. \qquad (2)$$

Prima din cele două egalități ne dă

$$\sum_{j=0}^{n} b_j[1-\cos(n-j+1)\theta] = 0$$

ceea ce implică

$$\sum_{j=0}^{n} b_j \sin^2 \frac{(n-j+1)\theta}{2} = 0$$

și cum coeficienții $b_j (j = 0, 1, 2, \ldots, n)$ sînt pozitivi rezultă că

$$\sin \frac{(n-j+1)\theta}{2} = 0 \quad \text{oricare ar fi } j = 0, 1, 2, \ldots, n$$

ceea ce face ca să fie îndeplinită și a doua din egalitățile (2)

Dar din

$$\sin \frac{(n-j+1)\theta}{2} = 0 \quad \text{oricare ar fi } j = 0, 1, 2, \ldots, n$$

rezultă $\theta = 0$ și prin urmare $\cos \theta = 1$, deci $x_0 = 1$. Am văzut însă că $x_0 = 1$ nu poate fi rădăcină. Contradicția la care am ajuns din ipoteza $|x_0| \leqslant 1$, dovedește tocmai ceea ce voiam să demonstrăm.

Să observăm acum că afirmația b) din teorema 1 s-ar mai putea scrie și sub forma:

$$\text{dacă } 0 < \frac{a_k}{a_{k-1}} < 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \text{ atunci}$$

rădăcinile polinomului satisfac $|x_k| < 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Aceasta ne sugerează următoarea generalizare a teoremei anterioare.

3. *Teoremă.* Dacă coeficienții polinomului

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

Scanned with OKEN Scanner

sînt pozitivi și există numerele m, M astfel că

$$0 < m < \frac{a_k}{a_{k-1}} < M \quad (k = 1, 2, \ldots, M)$$

atunci rădăcinile $x_k (k = 1, 2, \ldots, M)$ ale polinomului satisfac

$$m < |x_k| < M \quad (k = 1, 2, \ldots,).$$

Într-adevăr, considerînd polinomul dat $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$ și făcînd transformarea $x = My$, obținem:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k M^{n-k} y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} c_k y^{n-k} = Q(y)$$

unde am notat $c_k = a_k M^{n-k}$.

Polinomului $Q(y)$ îi putem aplica teorema anterioară deoarece coeficienții c_k sînt pozitivi și

$$\frac{c_k}{c_{k-1}} = \frac{a_k M^{n-k}}{a_{k-1} M^{n-k-1}} = \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{1}{M} < M \frac{1}{M} = 1$$

așa că rădăcinile $y_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ vor satisface $|y_k| < 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Dar cum $x_k = My_k$, rezultă $y_k = \frac{x_k}{M}$ și deci

$$|x_k| < M.$$

Pentru a demonstra inegalitatea $|x_k| > m$ considerăm polinomul transformat $P\left(\frac{1}{x}\right)$, deci

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^n}(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0)$$

și observăm că în polinomul

$$P^*(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

avem conform ipotezei,

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} > m \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \text{ adică } \frac{a_{k-1}}{a_k} < \frac{1}{m} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ceea ce face posibilă aplicarea rezultatului de mai sus la polinomul P^*.

Scanned with OKEN Scanner

Atunci, rădăcinile sale x'_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ vor satisface

$$|x'_k| < \frac{1}{m} \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

și cum $x'_k = \frac{1}{x_k}$ rezultă $|x_k| > m$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Astfel teorema este complet demonstrată.

Exemplu. Fie

$$P(x) = 2x^6 + 4x^5 + 3x^4 + x^2 + 3x + 2$$

la care rapoartele de coeficienți consecutivi sînt

$$\frac{4}{2} = 2;\ \frac{3}{4};\ \frac{1}{3};\ \frac{3}{1};\ \frac{2}{3}.$$

În acest caz avem

$$m = \frac{1}{3};\ M = 3$$

și conform teoremei 2, rădăcinile polinomului vor satisface dubla inegalitate

$$\frac{1}{3} < |x_k| < 3 \qquad k = 1, 2, 4, 5, 6.$$

§ 5. PROBLEME

1. Fie $P(x) = 3x^2 + 3px + p^2 - 1$ un polinom din $R[x]$ și x_1, x_2 rădăcinile sale. Să se arate că $P(x_1^3) = P(x_2^3)$.

2. Se dă ecuația $x^2 - (3a + 1)x - a^3 = 0 \left(a \geqslant -\frac{1}{4}\right)$.

Să se arate că:

1) Ecuația are rădăcini reale.

2) Între rădăcinile ei există relația $\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} = 1$.

3) Considerînd a întreg nenegativ să se găsească condiția necesară și suficientă că rădăcinile să fie întregi.

4) Dacă a verifică condiția de la punctul 3) să se arate că rădăcinile sînt cuburi perfecte.

3. Fie $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(c \neq 0)$ și x_1, x_2 rădăcinile sale. Să se arate că $P(mx_1 + nx_2) = P(mx_1) + P(nx_2)$ dacă și numai dacă $mn = \frac{1}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Fie $a, b, c \neq 0$. Dacă ecuațiile cu coeficienți reali $x^2 + ax + bc = 0$, $x^2 + bx + ac = 0$ au o rădăcină comună să se arate că celelalte rădăcini verifică ecuația $x^2 + cx + ab = 0$.

5. Să se arate că ecuația $6(x - a)(x - b) + 3a(x - b) + 2b(x - a) = 0$ $a, b \in \mathbf{R}$, are rădăcini reale.

6. Găsiți condiția necesară și suficientă pentru ca $ax^2 + bx + c \leqslant \frac{a+b+c}{3}(x^2 + x + 1)$ pentru orice x real $(a, b, c \in \mathbf{R})$.

7, Fie $P(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in R$. Să se găsească condiția necesară și suficientă pentru ca $P(x) \geqslant k$ pentru $x \geqslant k$ oricare ar fi k real.

8. Dacă $a, b, c \in \mathbf{R}$ și $|ax^2 + bx + c| \leqslant 1$, pentru $\forall x$, $|x| \leqslant 1$, să se afle maximul expresiei $\frac{8}{3}a^2 + 2b^2$ și apoi coeficienții a, b, c pentru care se realizează acest maxim.

9. Dacă $|ax^2 + bx + c| \leqslant 1$ pentru $\forall(x)$, $|x| < 1$ $a, b, c \in \mathbf{R}$ atunci $|cx^2 + bx + a| \leqslant 2$ pentru $\forall x$, $|x| \leqslant 1$.

10. Fiind dat polinomul $Q(x) = x^2 + 3x + 1$ să se determine polinomul $R(x)$, de grad minim posibil, astfel încît restul împărțirii lui $Q(x)R(x)$ cu $x^3 - 2$ să fie 1. Aplicație la raționalizarea lui

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2^2} + 3\sqrt[3]{2} + 1}.$$

11. Fie $P(x) = 2x^2 - 7x + 8$. Să se arate că orice funcție $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ pentru care $f(P(x)) = P(f(x))$, $x \in \mathbf{R}$ are cel puțin un punct fix.

12. Fie polinomul $P \in R[x]$, $P(x) = x^2 + ax + b$. Să se arate că

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P(x)| - \min_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P(x)| \geqslant \frac{1}{2}.$$

13. Să se rezolve ecuația $(x - a)^3 + (x - b)^3 = a^3 + b^3$; $a, b \in \mathbf{R}$.

14. Să se rezolve ecuația $(x - a)^3 + (x - b)^3 = (a - b)^3$; $a, b \in \mathbf{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

15. Să se rezolve ecuația $2x^3 - 3ax^3 + (a^2 + b)x - a = 0$ în cazurile $b = 1$ și $b = 2$; $a \in \mathbf{R}$.

16. Să se rezolve ecuația cu coeficienți reali $ax^3 + bx^2 + cx + d$ dacă $b^2 = 3ac$.

17. Să se rezolve ecuația $\frac{x+a}{a} + \frac{x+b}{b} + \frac{a}{x+a} + \frac{b}{x+b}$, unde a și b sînt numere reale nenule.

18. Să se rezolve ecuația: $\frac{1}{ax+b-c} + \frac{1}{-a+bx+c} + \frac{1}{a-b+cx} = \frac{1}{(a+b+c)x}$ pentru $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$.

19. Să se rezolve ecuația: $\sum_{k=0}^{n} (x + ak)^3 = 0$.

20. Să se rezolve ecuația $x^3 + px + q = 0$ punînd rădăcinile sub forma $x = u + v$ unde $uv = -\frac{p}{3}$.

21. Fie $P(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 9$. Să se calculeze $P\left[\frac{(a+1)^2}{a}\right]$ și apoi să se rezolve ecuația $P(x) = 0$.

22. Să se rezolve ecuația $4x^3(m+1) + x(m-3) - m + 1 = 0$, știind că admite o rădăcină independentă de m.

23. Să se determine a astfel încît ecuația $x^3 + 6ax^2 + (12a^2 - 5)x + 2a(4a^2 - 5) = 0$ să aibă o rădăcină rațională.

24. Să se arate că rădăcinile ecuației $x^3 + (1 - 2\sqrt{2})x^2 + (5\sqrt{2} - 6)x + 14\sqrt{2} - 20 = 0$, sînt în progresie geometrică și apoi să se rezolve ecuația.

25. Să se arate că rădăcinile ecuației $x^3 + 3(1 - \sqrt{2})x^2 + (5 - 6\sqrt{2})x + 3 - \sqrt{2} = 0$, sînt în progresie aritmetică și apoi să se rezolve ecuația.

26. Știind că ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ are două rădăcini distincte care au cuburile egale, găsiți condiția îndeplinită de a, b, c și rezolvați ecuația în funcție de a și b.

Scanned with OKEN Scanner

27. Dîndu-se ecuațiile $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ și $ry^3 + qy^2 + py + 1 = 0$, să se arate că dacă $r \neq 0$ și $\frac{p+r}{p-r} = \frac{1+q}{1-q}$, atunci $(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(y_1^3 + y_2^1 + y_3^3) = 1$ unde x_i, y_i $(i = 1, 2, 3)$ sînt rădăcinile ecuațiilor date.

28. Fie $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + m$ și x_1, x_2, x_3 rădăcinile sale. Să se arate că $P(1 + x_1)\, P(1 + x_2)\, P(1 + x_3)$ este real oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$.

29. Să se arate că rădăcinile ecuației $x^3 + ax^2 + bx + a = 0$ satisfac relația:

$$\frac{1}{1 + x_1^2} + \frac{1}{1 + x_2^2} + \frac{1}{1 + x_3^2} = 1 - \frac{2}{b - 1}, \quad (b \neq 1).$$

30. Fie ecuația $x^3 + ax^2 + x + b = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

Să se arate că expresia $E = (x_1 - x_2)^4 + (x_2 - x_3)^4 + (x_3 - x_1)^4$ nu depinde de b.

31. Fie M mulțimea polinoamelor $\{x^3 + ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbf{R}\}$

1) Găsiți polinoamele $P(x) \in M$ astfel încît polinomul din M care are ca rădăcini pătratele rădăcinilor polinomului $P(x)$ să coincidă cu $P(x)$.

2) Găsiți polinoamele din M astfel ca $P(x^2) = -P(x)P(-x)$.

32. Fie ecuațiile:

(1) $\qquad x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

(2) $\qquad 8y^3 + 8ay^2 + 2(a^2 + b)y + ab - c = 0.$

Să se găsească relațiile între rădăcinile celor două ecuații.

33. Dacă ecuația $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ $(a, c > 0)$ are rădăcinile reale x_1, x_2, x_3, atunci notînd $S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$ avem $S_k > 0$, $k \in N$.

34. Fie ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

Dacă $x_1^n + x_2^n + x_3^n = x_1^n x_2^n + x_1^n x_3^n + x_2^n x_3^n$ pentru orice n natural să se determine a, b, c.

Scanned with OKEN Scanner

35. Fie ecuația $x^3 - ax^2 + b = 0$, cu rădăcinile reale. Să se arate că dacă $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ atunci

$$\sqrt{a - x_1} = \sqrt{a - x_2} + \sqrt{a - x_3}.$$

36. Dacă ecuația $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ admite rădăcinile reale x_1, x_2, x_3 atunci $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \geqslant \frac{b}{a^3} \cdot (10ad - bc)$.

37. Fie P un polinom cu coeficienți reali de gradul 3. Să se arate că dacă polinomul derivat are toate rădăcinile reale atunci există $a \in \mathbf{R}$ astfel ca ecuația $P(x) = a$ să aibă toate rădăcinile reale.

38. Se dă polinomul $P(x) = m(x - a)^3 + n(x - b)^3 + p(x - c)^3$, cu a, b, c constante date reale și diferite două cîte două, iar m, n, p trei parametri reali.

1) Să se arate că dacă $P(x) = k$, $\forall x \in \mathbf{R}$ atunci $P(x) = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$;

2) Dacă m, n, p au valori strict pozitive, polinomul $P(x)$ admite o singură rădăcină reală.

3) Dacă $P(a) = P(b) = 0$ atunci $P(c) = 0$.

39. Să se arate că ecuația $ax^3 - 3b^2 - 3ax + b = 0$ are toate rădăcinile reale.

40. Dacă a, b, c sînt pozitive să se arate că: $P(x) = x^3 + ax^2 - (b + c)x - ab = 0$ are rădăcini reale.

41. Să se arate că ecuația: $P(x) = x^3 + 3ax^3 + 3bx + ab = 0$, $a, b \in \mathbf{R}$, $b \leqslant 0$ are toate rădăcinile reale.

42. Să se arate că ecuația $P(x) = x^3 + 3x^2 + bx + c = 0$ are toate rădăcinile reale, știind că $b, c \in [-4, 0]$.

43. Dacă a și b sînt numerele reale să se arate că ecuația $x^3 - 3ax^2 + bx + a = 0$ are cel puțin o rădăcină în intervalul $(-1, 1)$. *Generalizare.*

44. Se dă ecuația $2x^3 + 2ax^2 + (a^2 + 4a + 11)x + b = 0$, $a, b \in \mathbf{R}$;

1) Să se găsească o relație între rădăcini independentă de a și b;

2) Să se arate că dacă rădăcinile sînt reale atunci se găsesc în intervalul $[1, 3]$.

Scanned with OKEN Scanner

45. Fie ecuația $x^3 + 3ax^2 + bx - 4a^3 = 0$ cu rădăcinile reale x_1, x_2, x_3.

Să se arate că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geqslant 9a^2$.

46. Știind că ecuația $x^3 - 3x^2 + 2x - a = 0$, $a > 0$ are rădăcinile reale x_1, x_2, x_3 să se arate că $x_1^2 - x_2x_3 \leqslant 2\sqrt{3} + 1$.

47. Fie ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ cu coeficienți reali și $a^2 < 3b$. Să se arate că ecuația admite o singură rădăcină reală x_0 și că $|x_0| \leqslant \frac{4|c|}{4b - a^2}$.

48. Să se rezolve ecuația: $2x^3 + 2(a-b)x^2 + (a^2 + 2b^2)x + c = 0$ știind că toate rădăcinile sînt reale. Să se calculeze a și c în funcție de b.

49. Să se arate că dacă ecuația $x^3 + ax^2 + x + b = 0$ are toate rădăcinile reale atunci:

$$9(a^2 + b^2) + 14ab \geqslant 32.$$

50. Ecuația $x^3 - x^2 + ax - b = 0$ are rădăcinile reale și pozitive. Să se arate că $a - b \leqslant \frac{8}{27}$.

51. Se dă ecuația $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ cu rădăcini reale și pozitive.

Știind că $c > 1$ și $b > ac$ să se arate că:

a) Ecuația nu admite rădăcina 1;

b) O rădăcină este subunitară și două supraunitare.

52. Fie $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ și x_1, x_2, x_3 rădăcinile lui $P(x) = 0$.

În ipoteza că rădăcinile sînt reale și distincte să se arate că:

a) $\frac{x_1^2}{P'(x_1)} + \frac{x_2^2}{P'(x_2)} + \frac{x_3^2}{P'(x_3)} = 1$ unde $P'(x)$ este derivata lui $P(x)$.

b) $\frac{Q(x_1)}{P'(x_1)} + \frac{Q(x_2)}{P'(x_2)} + \frac{Q(x_3)}{P'(x_3)} = 0$ dacă Q este un polinom de gradul întîi.

53. Fie ecuația $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}$. Știind că ecuația are o rădăcină de modul 1 (reală sau nu) să se rezolve găsind și relațiile între a, b, c.

Scanned with OKEN Scanner

54. Se consideră ecuația $t^3 + 3t + x = 0$, unde $x \in \mathbf{R}$ este un parametru.

a) Să se arate $\forall x \in \mathbf{R}$ ecuația are o singură rădăcină reală.

b) Fie $t(x)$ rădăcină reală a acestei ecuații. Să se precizeze domeniul de derivabilitate al funcției t și să se calculeze $t'(4)$.

c) Să se traseze graficul funcției t de variabilă x.

55. Fie $a_{ij} \in \mathbf{R}$, $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, 3)$.

Să se arate că ecuația $\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - s & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - s \end{vmatrix} = 0$ are rădăcinile reale.

56. Fie P un polinom cu coeficienți reali. $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Să se arate că $\max\limits_{x \in C \mid |x|=1} |P(x)| \geqslant |a| + |d| + \frac{1}{2}||b| - |c||$.

57. Să se rezolve ecuația:

$$(x^2 - a)^2 = a - x.$$

58. Să se rezolve ecuația:

$$x^4 - (1 + m)x^3 - x^2 + (m^2 + 1)x + m = 0.$$

59. Să se rezolve ecuația $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $a, b, c, d \in R$, știind că $c^2 = a^2 d$. În ce caz toate rădăcinile sînt reale?

60. Să se rezolve ecuația $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + \frac{c^2}{a^2} = 0$.

61. Să se rezolve ecuația $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ în ipoteza $b = d : \frac{a}{c} + \frac{c}{a}$.

62. Să se rezolve ecuația: $(x - a)^4 + (x - b)^4 = (a - b)^4$.

63. a) Să se determine forma polinoamelor $P(x)$ de gradul 4, cu coeficienți reali astfel ca $P(x) = P(a - x)$, a real $\neq 0$ și coeficientul lui x^4 egal cu 1.

b) Să se indice o metodă de rezolvare a ecuației $P(x) = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

c) Să se determine polinomul $P(x)$ cu a întreg, astfel ca să fie divizibil cu $x - 1$, iar restul împărțirii la $x^2 + 1$ să fie $-40x - 10$. În acest caz să se afle rădăcinile ecuației $P(x) = 0$.

64. Să se afle abscisele punctelor de minim ale funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = (x + a)(x + b)(x + c)(x + d)$, unde $a + b = c + d$ $(a, b, c, d \in \mathbf{R})$.

65. Să se arate că dacă $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, admite trei puncte de extrem distincte atunci $3b^2 \neq 8ac$.

66. Să se rezolve $x^4 + 2ax^3 + bx^2 + a(b - a^2)x + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}$. În ce caz toate rădăcinile sînt reale?

67. Fie $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $P \in R[x]$, $a > 0$, $e > 0$. Dacă $\frac{b^2}{a} + \frac{d^2}{e} < 4c$, să se arate că polinomul nu are rădăcini reale.

68. Fie $P(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + 1$, $P \in R[x]$. Știind că $|a_i| < \frac{2}{3}$ $(i = 1, 2, 3)$ să se arate că $P(x) > 0$ pentru orice x real. *Generalizare.*

69. Fie $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, și $a, e > 0$, $4ac - b^2 > \frac{ad^2}{e}$. Să se arate că $P(x) > 0$ pentru orice x real.

70. Să se arate că dacă rădăcinile unui polinom de gradul patru sînt în progresie aritmetică, atunci și rădăcinile polinomului derivat sînt în progresie aritmetică.

71. Să rezolve ecuația: $x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 30x + 25 = 0$, știind că $|x_i| = 5$, $i = 1, 2, 3, 4$.

72. Să se rezolve ecuația $P(x) = x^4 + ax^3 + 2x^2 + cx + d = 0$, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, știind că are două rădăcini complexe conjugate de modul 1.

73. Să se rezolve ecuația $x^5 - 2x^4 + ax^3 + 8x^2 + bx + 32 = 0$, $(a, b, c \in \mathbf{R})$, știind că rădăcinile au același modul, una singură fiind reală.

74. Fie x_1, x_2, x_3, x_4 rădăcinile ecuației $x^4 + 1 = 0$. Să se calculeze $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n$.

Scanned with OKEN Scanner

75. Fie P un polinom de grad 4 cu coeficienți reali. Să se arate că dacă polinomul derivat are toate rădăcinile reale atunci există $a \in \mathbf{R}$ astfel încît ecuația $P(x) = a$ să aibă toate rădăcinile reale. Proprietatea se păstrează și pentru polinoamele de grad superior lui 4?

76. Se consideră ecuația $x^5 + 5x^3 + 5x - 2m = 0$, $m \in \mathbf{R}$.

a) Să se arate că oricare ar fi $m \in R$, ecuația are o singură rădăcină reală.

b) Să se afle rădăcina reală a ecuației în funcție de m scriind-o sub forma $x = u + v$, unde $uv = -1$, $u, v \in \mathbf{R}$.

77. Să se arate că dacă ecuațiile:

$$x^5 + ax^2 + bx + 1 = 0, \quad x^5 + mx^2 + nx + 1 = 0$$

au o rădăcină dublă comună, ele au toate rădăcinile comune.

78. Să se rezolve ecuația $(x-1)^6 + 6x(x-1)^4 - 32x^3 = 0$.

79. Fie $P(x) = (x^2 - x + 1)^3 - ax^2(x-1)^2$.

1) Să se arate că $P(x) = P(1-x)$ și $P(x) = x^6 P\left(\frac{1}{x}\right)$ pentru $x \neq 0$.

2) Dacă x_1 este o rădăcină a ecuației $P(x) = 0$ să se afle celelalte rădăcini.

80. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere diferite. Să se arate că:

$$E = \frac{(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)} + \frac{(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})} \text{ este constantă.}$$

81. Să se rezolve ecuația

$$x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \ldots + a_{2n-2}x^2 - 2nx + 1 = 0,$$

știind că are toate rădăcinile pozitive.

82. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+x^3)} + \frac{x}{(1+x^3)(1+x^4)} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(1+x^{n+1})(1+x^{n+2})} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

83. Să se arate că ecuația $\frac{1}{x} - \frac{C_n^1}{x-1} + \frac{C_n^2}{x-2} - \frac{C_n^3}{x-3} + \ldots + (-1)^n \frac{C_n^n}{x-n} = 0$ nu are soluții.

84. Să se afle soluțiile reale ale ecuației $(x-a)^n + (x-b)^n = (a-b)^n$.

85. Să se găsească o rădăcină a ecuației:

$$(x+\sqrt{x^2-a})^n + (x-\sqrt{x^2-a})^n + b = 0, \quad n \in N^*.$$

Să se deducă de aici formula lui *Cardan* pentru ecuația de gradul trei.

86. Să se rezolve ecuația $x^{m+1} - C_m^1 x^m + C_m^2 x^{m-1} + \ldots + xP(x) = 0$ (grad $P = m-3$), știind că rădăcinile sînt reale.

87. Să se rezolve ecuația:

$$C_{2m}^1 x^{m-1} + C_{2m}^3 x^{m-2} + \ldots + C_{2m}^{2m-3} x + C_{2m}^{2m-1} = 0.$$

88. Să se rezolve ecuația $\frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \ldots + \frac{1}{x-x_n} = 0$, unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile ecuației $x^n + 1 = 0$.

89. Să se arate că polinomul $P(x) = x(x+2)(x+4)\ldots(x+2n) + (x+1)(x+3)\ldots(x+2n+1)$ are toate rădăcinile reale.

90. Fie $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ un polinom cu toate rădăcinile reale. Să se arate că polinomul $Q(x) = C_{n+3}^3 x^3 + aC_{n+2}^2 x^2 + bC_{n+1}^1 x + cC_n^0 = 0$ are toate rădăcinile reale, $n \in N$.

91. Fie $P(x) = a_n x^n + a_n x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, un polinom cu rădăcinile reale. Să se arate că polinomul $Q(x) = m^2 a_n x^n + (m-1)^2 a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + (m-n)^2 a_0$ are de asemenea rădăcinile reale $(m \geqslant n)$.

92. Dacă numerele $a_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ sînt reale să se arate că ecuația $\frac{a_1}{a_1 - x} + \frac{a_2}{a_2 - x} + \ldots + \frac{a_n}{a_n - x} = n$ are rădăcinile reale.

93. Găsiți condiția necesară și suficientă ca ecuația $x^n + ax + b = 0$ $(a, b \in \mathbf{R}, a \neq 0, n \geqslant 3, n$ impar) să aibă trei rădăcini reale.

Scanned with OKEN Scanner

94. Fie $P(x) = x^n - 3x^{n-1} + \frac{7}{2}x^{n-2} - \frac{11}{6}x^{n-3} + \frac{1}{8}x^{n-4} + \\ + \ldots + = 0$. un polinom cu toate rădăcinile reale. Fie $S_k = \\ = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$.

a) Să se calculeze S_1, S_2, S_3, S_4.

b) Să se arate că $n \geqslant 5$.

95. Fie x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ rădăcinile ecuației:

$$x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \ldots + a^{n-1}x + a^n = 0 \quad (a \neq 0).$$

Să se afle numerele k pentru care $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{a}\right)^k = n$.

96. Se dă ecuația $\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} = 0$ cu rădăcinile strict pozitive. Să se arate că $\frac{\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}}{a_0 a_n} \geqslant (C_{2n}^n - 2)$.

97. Se dă ecuația $\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-1} = 0$ cu rădăcinile strict pozitive.

Să se arate că $\frac{\left|\prod_{i=1}^{n} a_i\right|}{|a_0 a_n|^{\frac{n+1}{2}}} \geqslant \prod_{k=0}^{n-1} (n-k)^{n-2k-1}$.

98. Fie $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ cu toate rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reale. Notăm $E_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + \\ + a_n^k$ $(k \in N^*)$. Știind că $E_k = 1$ pentru trei valori consecutive ale lui k să se arate că $E_k = 1$ pentru orice $k \in N^*$ și să se găsească coeficienții polinomului.

99. Fie ecuația $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, $a_i \in \mathbf{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $n \geqslant 2$ și propozițiile:

P_1 : Rădăcinile ecuației sînt reale.

P_2 : $(n-1)a_1^2 \geqslant 2na_0a_2$.

Care din implicațiile:

a) $P_1 \to P_2$, b) $P_2 \to P_1$

este adevărată?

Scanned with OKEN Scanner

100. Fie $P \in R[x]$ și x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ rădăcinile sale. Să se arate că $S = \sum_{k=1}^{n} x_1 x_2 \ldots x_{k-1} \overline{x}_k x_{k+1} \ldots x_n$ este un număr real.

101. Fie ecuațiile $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$

$$y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \ldots + b_n = 0$$

cu rădăcinile x_i, y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, reale și pozitive. Să se arate că $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant y_1 b_1 - 2\sqrt{a_2 b_2}$.

102. Dacă ecuația $\frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x+2} + \ldots + \frac{a_n}{x+n} = 0$ admite $n + 1$ rădăcini, atunci $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

103. Fie $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $a_i \in \mathbf{R}$. Să se arate că dacă $P(x) \geqslant 0$ pentru $x \in [0, 1]$ atunci $\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{x+i} \geqslant 0$ pentru orice $x \in (0, \infty)$.

104. Fie $P(x) = \frac{x^{n-1}}{a_1 a_2} + \frac{x^{n-2}}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{x}{a_{n-1} a_n} - \frac{n-1}{a_1 a_2}$ numerele $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$ fiind în progresie aritmetică. Să se arate că $P(x)$ se divide cu $x - 1$, dar nu se divide cu $(x-1)^2$.

105. Considerăm polinoamele $P, Q \in R[x]$ cu toate rădăcinile reale. Dacă $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - a_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{x - b_j}$, $\forall x \in R$, $x \neq a_i$, $x \neq b_j$, unde a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ și b_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ sînt rădăcinile polinoamelor P și Q, să se demonstreze că polinoamele P și Q au același grad și aceleași rădăcini.

106. Fie u o rădăcină de ordin n a unității, $u \in \mathcal{C} - \mathbf{R}$ și $a, b \in \mathbf{R}$

a) Să se arate că $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{a - bu^k}$ este un număr real $(a \neq \pm b)$

b) Dacă $0 < b < a$ atunci $S > n$.

Scanned with OKEN Scanner

107. Fie $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $a_n \neq 0$ și $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile sale. Notînd $S_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$ să se arate că dacă $|x_i| < 1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, $S_1 + S_2 + \ldots + S_k$ are limită pentru $k \to \infty$ și limita este $\dfrac{a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n}{1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$.

108. Fie $P \in R[x]$. Dacă rădăcinile polinomului sînt reale atunci $(n-1)\,[P'(x)]^2 \geqslant nP(x)P''(x)$, unde n este gradul polinomului.

109. Fie un polinom cu coeficienți reali

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \text{ și } M = |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}| > 1.$$

Să se demonstreze că:
a) dacă $x > M$, atunci $P(x) > 0$,
b) dacă $x < -M$, atunci $(-1)^n P(x) > 0$.

110. Fie $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, $a_i \in R$; $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Dacă $\min(a_0, a_0 + a_2, a_0 + a_2 + a_4, \ldots) > \max(|a_1|, |a_1 + a_3|, |a_1 + a_3 + a_5|, \ldots)$ atunci ecuația $P(x) = 0$ nu are rădăcini în intervalul $[-1, 1]$.

111. Fie P un polinom cu coeficienții 0 sau 1 și $P(0) \neq 0$. Să se arate că P nu are rădăcini în intervalul $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

112. Fie $P \in R[x]$, un polinom cu termenul liber nul și care admite o rădăcină pozitivă x_0. Să se arate că $P'(x)$ admite o rădăcină pozitivă mai mică decît x_0.

113. Fie $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, $(a_i \in R,\ i = 0, 1, \ldots, n)$.
Știind că $a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} = 0$ să se arate că ecuația $P'(x) = 0$ are cel puțin o rădăcină în intervalul $(0, 1)$.

114. Fie $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $P \in R[x]$ cu proprietatea că există C, $-\infty < C < 0$ astfel încît

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = C \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+1}.$$

Să se arate că polinomul P are cel puțin o rădăcină în $(0, 1)$.

Scanned with OKEN Scanner

115. Fie $P \in R[x]$ un polinom de grad n fără rădăcini reale. Să se arate că pentru orice $Q \in R[x]$, grad $Q \leqslant n$ există N astfel încît ecuația $P(x) = kQ(x)$ să nu aibă rădăcini reale pentru orice $k \in \mathbf{R}$, $|k| < N$.

116. Fie $P \in R[x]$, fără rădăcini întregi și $a \in \mathbf{R} - Q$ astfel încît polinomul $(x - a)P(x)$ are coeficienți întregi. Să se arate că $|P(n)| > 1$, unde $n = [a + 1]$.

117. Fie $P(x) = x^n + (a + b)x^{n-1} + (a^2 + b^2)x^{n-2} + \ldots + a^n + b^n$ și $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile sale. Punem $S_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$. Să se afle $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

118. Fie n un număr natural. Pentru ce valori ale lui k există un polinom de grad n astfel încît atît el cît și una din derivatele sale admite pe 0 ca rădăcină cu ordinul de multiplicitate k?

119. Fie P și Q două polinoame cu coeficienți reali. Dacă există numerele reale a și b astfel ca $P(a) = Q(b)$ și $P(b) = Q(a)$, să se arate că ecuația $P(x) = Q(x)$ are cel puțin o soluție.

120. Fie $P \in R[x]$ un polinom fără rădăcini reale. Să se arate că pentru orice polinom $Q \in R[x]$ cu grad $Q \leqslant$ $\leqslant$ grad P există un număr $N > 0$ astfel încît ecuația $xP(x) = kQ(x)$ are o singură soluție reală pentru orice $k, \in \mathbf{R}$, $|k| \leqslant N$.

121. Fie P și Q două polinoame cu coeficienți reali. Știind că ecuațiile $P(x) = 0$, $Q(x) = 0$ au două rădăcini reale comune, să se arate că ecuația $[P(x)Q(x)]'' = 0$, are cel puțin o rădăcină.

122. Fie $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ cu toate rădăcinile reale și M astfel încît $x_i \leqslant M$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Să se arate că pentru $x > M$ avem $(nx + a_1)P'(x) \geqslant$ $\geqslant n^2P(x)$.

123. Fie $P(x)$ un polinom cu coeficienți reali și rădăcinile pozitive. Să se arate că $xP(x)P''(x) < P'(x)[xP'(x) - P(x)]$ pentru orice x real.

Scanned with OKEN Scanner

124. Știind că polinomul cu coeficienți reali P nu are rădăcini reale să se arate că nici polinoamele Q și R date de

$$Q(x) = P(x) + P'(x) + \ldots + P^{(n)}(x)$$
$$R(x) = P(x) - P'(x) + \ldots + (-1)^n P^{(n)}(x)$$

nu au rădăcini reale.

125. Fie P un polinom cu coeficienți reali. Să se arate că dacă există $k \in \mathbf{R}$ astfel ca ecuația $P(x) - kP'(x) = 0$ să nu aibă rădăcini reale atunci P nu are rădăcini reale.

126. Fie $P(x)$ un polinom de gradul n cu coeficienți reali. Să se arate că dacă polinomul $f(x) = x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \ldots + \lambda_{n-1}x + \lambda_n$ are toate rădăcinile reale și polinomul $F(x) = P(x) + \lambda_1 P'(x) + \ldots + \lambda_n P^{(n)}(x)$, nu are nici o rădăcină reală, atunci polinomul $P(x)$ nu are nici o rădăcină reală.

127. Să se determine toate polinoamele de grad n ($n \geqslant 1$) care verifică relația $P(x) = P'(x)\, P''(x) \ldots P^{(n)}(x)$ unde $P^{(k)}(x)$ este derivata de ordin k a lui $P(x)$.

128. Să se găsească polinoamele $P \in R[x]$ pentru care $|P(x)| \leqslant |x|$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

129. Să se găsească polinoamele cu coeficienți reali pentru care $|P(x)| \leqslant x^2$ pentru orice x real.

130. Fie $Q \in R[x]$ un polinom cu toate rădăcinile reale. Să se găsească polinoamele $P \in R[x]$ pentru care $|P(x)| \leqslant |Q(x)|$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

131. Există $P \in R[x]$, $P \not\equiv 0$ astfel că $xP(x-1) = (x+1)P(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$?

132. Să se găsească toate polinoamele P cu coeficienți reali care satisfac egalitatea $xP(x) = (x-3)P(x+1)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

133. Să se determine mulțimea polinoamelor $P(x)$ cu coeficienți reali care satisfac condiția $(x-4)P(x+1) - xP(x) + 20 = 0$.

134. Să se găsească polinoamele $P \in R[x]$ de grad n pentru care $P(x+x_1) + P(x+x_2) + \ldots + P(x+x_n) = nP(x)$ pentru orice x, unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile lui P.

Scanned with OKEN Scanner

135. Fie P și Q două polinoame cu coeficienți reali. Dacă $\frac{P(x+a)}{Q(x+a)} = \frac{P(x)}{Q(x)}$ pentru orice $a \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}$ pentru care $Q(x) \neq 0$, $Q(x+a) \neq 0$, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ este constant.

136. Fie P un polinom astfel ca $P(\sin x) = P(\sin 2x)$, pentru orice x real. Să se arate că P este un polinom constant.

137. Fie două polinoame $P(x)$ și $Q(x)$ astfel încît $P(x) \leqslant Q(x)$ pentru o infinitate de numere naturale și $P(x) \geqslant Q(x)$ pentru o infinitate de numere naturale. Să se arate că $P(x)$ și $Q(x)$ sînt identice.

138. Să se găsească toate polinoamele $P(x)$ de gradul n, cu coeficienți nenegativi, care sînt divizibile prin

$$Q(x) = x^2 - 2xa \cdot \cos\frac{\pi}{n} + a^2; \; x \in C, \; a > 0.$$

139. Să se găsească polinoamele P_n de grad n pentru care șirul $\{E_k\}_{k \in N^*}$, $E_k = k(n+k)\int_0^1 x^{k-1} P_n(x)\,dx$ este constant

140. Fie x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ rădăcinile ecuației $x^n - 1 = 0$ și P un polinom de grad $n-1$ pentru care $P(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Să se arate că, $P(0) = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$.

141. Fie P un polinom de grad n astfel încît $P(k) = a^k$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Să se calculeze $P(n+1)$.

142. Să se găsească funcțiile polinomiale $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ care verifică relația: $xP'(x) - (x+n)P'(x) + nP(x) = 0$ $(n \in N)$ pentru orice x real.

143. Fie $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$.

$$Q(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + a_m,$$

pentru care $P^2(x) = (x^2 - 1)Q^2(x) + 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

1) Să se arate că $P(x) = \pm nQ(x)$.

2) Să se arate că pentru fiecare n există polinoame care satisfac relația cerută.

Scanned with OKEN Scanner

144. Există $n \in N^*$ și $P \in R_{[}x]$ astfel încît $P^2(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$?

145. Dacă f, g sînt polinoame de gradul n să se arate că $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x), \quad x \in \mathbf{R}$$

este o funcție constantă. Caz particular: $g(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$; $t \in \mathbf{R}$, în egalitatea $T(x) = T(x_0)$. (S-a notat cu $f^{(k)}(x)$ derivata de ordin k a lui f în punctul x.)

146. Să se arate că rădăcinile polinoamelor $P(x) = 1 + 2x + \ldots + nx^{n-1} + \frac{(n^2+n)x^n}{2}$ au modulul subunitar pentru orice $n \in N$, $n \geqslant 2$.

147. Se consideră polinomul $x^{n+1} - \alpha z^n - \alpha z + 1$, unde α este real și $|\alpha| \leqslant 1$, iar $n \in N$. Să se arate că toate rădăcinile polinomului au modulul egal cu unu.

148. Fie $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ un polinom cu toate rădăcinile reale și cuprinse în intervalul $[-1, 1]$. Să se arate că dacă $|P(x)| > 1$ pentru orice $x \in [-1, 0)$ atunci $|P(x)| \leqslant 1$ pentru orice $x \in [0, 1]$.

149. Să se arate că pentru $\forall n$, $n \in N$ și $n > 2$, ecuația $x^n - nx + 1 = 0$ are două rădăcini pozitive α_n și β_n cu proprietățile:

1) $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 1$.

150. Să se arate că polinomul $P_n(x) = x^{n+1} - (x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$ are o singură rădăcină reală și pozitivă, pe care o notăm cu a_n. Să se arate că șirul $\{a_n\}_{n\in N^*}$ are limita $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

151. Fie ecuația $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = n$ și $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ rădăcinile ei. Să se arate că $\sum\limits_{k=1}^{n-1} |x_k| \geqslant n$ și $|x_k| < 2$ dacă $x \geqslant 3$.

Scanned with OKEN Scanner

152. Să se arate că ecuația:

$$x^n - a_1x^{n-1} - a_2x^{n-2} - \ldots - ax - a_{n-1} = 0,$$

$$a_i > 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

are o singură rădăcină pozitivă x_n și că pentru celelalte rădăcini avem $|x_i| < x_n$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. (Teorema lui *Cauchy*).

153. Se dă ecuația $x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - x - 1 = 0$, $n \geqslant 2$.

1) Să se arate că ecuația are cel mult două rădăcini reale.

2) Rădăcina pozitivă x_n verifică inegalitățile $2 - \frac{1}{n} < x_n < 2$.

3) Pentru celelalte rădăcini x_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ avem

$$\frac{1}{\sqrt[n]{3}} < |x_i| < 1.$$

154. Fie $n \in N$. Există $P \in R[x]$ de grad n astfel ca funcția $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ să fie injectivă?

155. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ nu toate nule și $P(x) = (x + a_1)(x + a_2) \ldots (x + a_n) + (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$, $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Să se arate că P este pară dacă n este par și P este impară dacă n este impar.

156. Să se arate că necesar și suficient, ca graficul unui polinom $P(x)$ cu coeficienți reali să admită ca axă de simetrie dreapta $x = a$, este ca să existe un alt polinom $Q(x)$ astfel încît

$$P(x) = Q[(x - a)^2], \ \forall x \in \mathbf{R}.$$

157. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție polinomială al cărui grafic admite axele de simetrie $x = a$ și $x = b$ $(a \neq b)$. Să se arate că f este o funcție constantă.

158. Rădăcinile polinomului $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ sînt legate prin relațiile $x_s + x_{n-s} = m$, $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Să se arate că $f(x) = (-1)^n f(m - x)$.

159. Fie $P_1, P_2, \ldots, P_n, Q$ polinoame cu coeficienți reali astfel încît $P_1^2(x) + P_2^2(x) + \ldots + P_n^2(x) = Q^2(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$ $(m \geqslant 2)$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Dacă rădăcinile lui Q sînt reale să se arate că polinoamele $P_1, P_2, \ldots, P_n, Q$ au aceleași rădăcini.

b) Dacă rădăcinile lui Q nu sînt toate reale proprietatea se păstrează?

160. Fie $P, Q \in R[x]$, Q neconstant.

Dacă $P(Q(x))$ este identic nul să se arate că $P(x)$ este identic nul.

161. Fie P un polinom cu coeficienți reali și $m, n \in N^*$.

Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{P(x^m)}{P(x^n)}$.

162. Resturile împărțirii unui polinom de grad n la $x - a_1$, $x - a_2$, ..., $x - a_k$ $(k \leqslant n)$ sînt a_1^k, a_2^k, ..., a_k^k. Să se afle restul împărțirii polinomului la $(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_k)$ dacă numerele $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sînt diferite între ele.

163. Cunoscînd resturile $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ale împărțirii unui polinom P de grad n respectiv prin $x - a_1$, $x - a_2$, ..., $x - a_k$ $(k \leqslant n)$ să se calculeze restul împărțirii lui P la $(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_k)$, numerele $a_1, a_2, \ldots, a_k$ fiind diferite între ele.

164. Fie $P \in R[x] \cdot P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. Dacă $a_i = a_{n-i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, atunci P se numește polinom reciproc de speța I. Să se arate că produsul a două polinoame reciproce de speța I este un polinom reciproc de speța I.

165. Fie $P \in R[x]$, $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. Dacă $a_i = -a_{n-i}$ atunci P se numește reciproc de speța II. Să se arate că

1) Produsul a două polinoame reciproce de speța II este un polinom de speța I.

2) Produsul dintre un polinom reciproc de speța I și unul de speța II este un polinom reciproc de speța II.

166. Fie $P \in R[x] P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ și x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ rădăcinile sale.

a) Dacă $|x_i| = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, atunci $a_i = (-1)^{n_0} a_{n-i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, unde n_0 este ordinul de multiplicitate al rădăcinii $x = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Dacă $|x_i| = r > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, atunci $a_i = (-1)^{n_0} r^{2n-i} a_{n-i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ unde n_0 este ordinul de multiplicitate al rădăcinii $x = r$.

167. Fie P un polinom cu coeficienți reali $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Să se arate că $\max_{x \in C,\ |x|=1} |P(x)|^2 \geqslant \sum_{k=0}^{n} a_k^2 \geqslant \min_{x \in C,\ |x|=1} |P(x)|^2$.

168. Fiind date două sisteme de numere $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ cu proprietatea: $\sum_{i=1}^{n} a_i^k = \sum_{i=1}^{n} b_i^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, să se arate că există o permutare $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ a numerelor $(1, 2, \ldots, n)$ astfel încît:

$$a_1 = b_{i_1},\ a_2 = b_{i_2}, \ldots, a_n = b_{i_n}.$$

169. Fie P un polinom de grad n (par) și $M_k = \sup_{x \in R} \left| \left(\frac{P(x)}{x^n + 1} \right)^{(k)} \right|$, $k = 0,\ 1, 2$.

1) Să se arate că M_k, $k = 0, 1, 2$ sînt finite.

2) Există inegalitatea $M_1^2 \leqslant 4 M_0 M_2$.

170. Fie $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, $a_i \in R$, $i = 1, 2, \ldots, n$, și numerele întregi $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Să se arate că există $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ astfel încît $P(x_k) \geqslant \frac{n!}{2^n}$.

171. Demonstrați că orice polinom se poate scrie ca diferența a două polinoame crescătoare pe **R**.

172. Notăm $P_k(x) = \frac{1 + x + x^2 + \ldots + x^{k-1}}{k}$. Să se arate că pentru $n \geqslant 0$ și $m \geqslant n \geqslant 1$ avem: $\frac{1 + x^m}{2} \geqslant \frac{P_{m+n}(x)}{P_n(x)}$.

173. Fie ecuația $P(x) = x^n + 2x^{n-1} + 3x^{n-2} + \ldots + (n-1)x^2 + nx + n + 1 = 0$. Să se arate că $x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k = -2$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fiind rădăcinile ecuației date.

174. Fie $P(x) = (n-1)x^n - nx^{n-1} + 1$.

a) Să se arate că $P(x) \geqslant 0$ dacă $x \geqslant 0$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Să se deducă inegalitățile $1-\frac{1}{n+1} \geqslant \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geqslant$ $\geqslant 1-\frac{1}{n}$, $n \in N^*$.

175. Să se determine $a, b, c \in \mathbf{R}$ astfel încît relația: $\int_{-1}^{1} P(x)dx = aP(1) + bP(-1) + cP(0)$ să fie adevărată pentru orice polinom P de gradul al doilea cu coeficienți reali.

176. Să se arate că ecuația $\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \ldots + \frac{1}{x-a_n} = 0$ $(a_1 < a_2 < \ldots < a_n)$ are $n-1$ rădăcini $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ și că

$$a_k + \frac{a_{k+1} - a_k}{n-k+1} < x_k < a_{k+1} - \frac{a_{k+1} - a_k}{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

177. Să se arate că ecuația $(x-\mathrm{i})^n + (x+\mathrm{i})^n = x^n$, $n \geqslant 3$, are toate rădăcinile reale.

178. Fie ecuația $x^3 + px + q = 0$, $p, q \in \mathbf{R}$. Se cere să se discute rădăcinile ei.

179. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil în care segmentele $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ au lungimile a, b, c respectiv. Să se afle raza cercului circumscris dacă se știe că $\overline{AD}$ este un diametru.

180. Fie $P(x) \in R[x]$ și $a > 0$. Dacă numărul de variații ale produsului $(x-a)P(x)$ este mai mare decît numărul de variații ale polinomului dat cu cel puțin două unități, atunci $P(x)$ are rădăcini complexe.

181. Să se arate că dacă polinomul $P(x) \in R[x]$ are patru coeficienți consecutivi în progresie aritmetică, atunci el are rădăcini complexe.

182. Fie $P(x) \in R[x]$ avînd toate rădăcinile reale. Să se arate că ecuația $P(x) - xP'(x) + x^2P''(x) = 0$, are cel puțin două rădăcini complexe.

183. Să se afle numărul de rădăcini reale ale polinomului

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x - 12.$$

Scanned with OKEN Scanner

184. Să se afle numărul de rădăcini reale ale polinomului $P(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 2x - 3$, și să se precizeze cîte dintre ele se găsesc cuprinse în intervalul $(-1, 0)$.

185. Să se afle numărul de rădăcini reale ale ecuației

$$x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 11x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0.$$

186. Dacă se notează $y + \frac{1}{y} = x$, să se arate că $y^n + \frac{1}{y^n}$ este un polinom întreg de gradul n în x, care are toate rădăcinile reale și cuprinse în intervalul $(-2, 2)$.

187. Cîte rădăcini reale are ecuația $x^n + px + q = 0$, $p, q \in \mathbf{R}$?

188. Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuației $x^5 - 5ax^3 + 5a^2x + 2b = 0$, unde a și b sînt numere reale.

189. Cîte rădăcini reale are polinomul:

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

190. Fie $P \in R[x]$ un polinom de gradul al treilea care nu are rădăcini multiple. Să se arate că polinomul

$$Q(x) = 2P(x)P''(x) - [P'(x)]^2$$

are două rădăcini reale și numai două. Ce se întîmplă dacă P are o rădăcină dublă? Dar dacă are o rădăcină triplă?

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul IV.

INELELE DE POLINOAME $Q[x]$ și $Z[x]$

Observație preliminară. Dacă P este un polinom cu coeficienți raționali atunci, printr-o amplificare convenabilă a coeficienților săi, îl putem scrie sub forma unui produs dintre o constantă și un polinom cu coeficienți întregi.

De pildă

$$P_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 1 = \frac{1}{6}(3x^2 + 4x - 6).$$

$$P_2(x) = 2x^5 - \frac{1}{3}x^4 + x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{12}(24x^5 - 4x^4 + 12x^3 - 9x^2 + 2x - 6).$$

De aceea, în cele ce urmează, vom considera într-o strînsă legătură cele două mulțimi de polinoame $Q[x]$ și $Z[x]$.

Cum unele proprietăți de care ne vom ocupa le sînt comune, vom considera mulțimea coeficienților $K \in \{Q, Z\}$; prin urmare K este fie corpul numerelor raționale, fie inelul numerelor întregi. Se va obține, în mod corespunzător, inelul de polinoame $K[x]$ și să considerăm un element P din acest inel

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Dacă se consideră $x \in \mathbf{R}$, atunci, cu ajutorul polinomului P, se poate defini funcția polinomială reală

$$f_p : \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ f_p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n;$$

iar dacă se consideră $x \in \mathcal{C}$, se definește funcția polinomială complexă

$$g_p : \mathcal{C} \to \mathcal{C};\ g_p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

a cărei restricție la mulțimea $\mathbf{R}$ este funcția f_p.

Scanned with OKEN Scanner

§ 1. PROPRIETĂȚI

1. Se observă ușor că, dacă $P_1, P_2 \in K[x]$ atunci, aplicîndu-le teorema de împărțire cu rest, cîtul lor precum și restul împărțirii sînt polinoame din $K[x]$.

De asemenea, cel mai mare divizor comun al lor (P_1, P_2) face parte din $K[x]$.

2. Fie polinomul $P \in K[x]$

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\,x + a_n$$

și să presupunem că el are rădăcina $x_1 = u + \sqrt{v}$, unde $u, v \in Q$ și $\sqrt{v} \in \mathbf{R} - Q$.

Atunci $P(x_1) = 0$, deci

$$P(x_1) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x_1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k (u + \sqrt{v})^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k (u^{n-k} + C_{n-k}^1\, u^{n-k-1}\sqrt{v} + C_{n-k}^2\, u^{n-k-2}\, v +$$

$$+ C_{n-k}^3\, u^{n-k-3}\, v\sqrt{v} + C_{n-k}^4\, u^{n-k-4} v^2 + \ldots) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{i=0,1,2,\ldots}^{2i \leqslant n-k} C_{n-k}^{2i}\, u^{n-k-2i}\, v^i + \right.$$

$$\left. + \sqrt{v} \sum_{i=0,1,2,\ldots}^{2i+1 \leqslant n-k} C_{n-k}^{2i+1}\, u^{n-k-2i-1}\, v^i \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0,1,2,\ldots}^{2i \leqslant n-k} C_{n-k}^{2i}\, u^{n-k-2i}\, v^i +$$

$$+ \sqrt{v} \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0,1,2,\ldots}^{2i+1 \leqslant n-k} C_{n-k}^{2i+1}\, u^{n-hi-1}\, v^i = 0$$

și cum numărul $P(x_1)$ este de forma $A + B\sqrt{v}$ cu $A, B \in Q$ și $\sqrt{v} \in \mathbf{R} - Q$, un astfel de număr este nul dacă și numai dacă $A = B = 0$. Într-adevăr, dacă $A + B\sqrt{v} = 0$ atunci, pentru $B = 0$ avem și $A = 0$, iar pentru $B \neq 0$ avem $\sqrt{v} = -\frac{A}{B} \in Q$ contrar presupunerii $\sqrt{v} \in \mathbf{R} - Q$.

Scanned with OKEN Scanner

Dar, pentru $A = B = 0$ avem și $A - B\sqrt{v} = 0$, ceea ce ne arată că, dacă se consideră numărul $x_2 = u - \sqrt{v}$ atunci, avem și

$$P(x_2) = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0,1,2,\ldots}^{2i \leqslant n-k} C_{n-k}^{2i}\, u^{n-k-2i}\, v^i -$$

$$- \sqrt{v} \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0,1,2,\ldots}^{2i+1 \leqslant n-k} C_{n-k}^{2i+1}\, u^{n-k-2i-1}\, v^i = 0.$$

Rezultă că și numărul $x_2 = u - \sqrt{v}$ este o rădăcină a polinomului P.

Prin urmare, *dacă* P *este un polinom cu coeficienți raționali, iar* $x_1 = u + \sqrt{v}$ *este o rădăcină a lui (unde* $u, v \in Q$ *și* $\sqrt{v} \in \mathbf{R} - Q$*), atunci și* $x_2 = u - \sqrt{v}$ *este o rădăcină a lui.*

Observație. Este ușor de observat că proprietatea aceasta se menține valabilă și dacă o rădăcină a lui P este de forma $x_1 = u + w\sqrt{v}$, unde $u, v, w \in Q$ și $\sqrt{v} \in \mathbf{R} - Q$.

3. Dacă $P \in K[x]$, iar $x_1 = \sqrt{u} + \sqrt{v}$ ($u, v \in Q$ și $\sqrt{u}, \sqrt{v} \in \mathbf{R} - Q$) este o rădăcină a lui P, atunci și numerele $x_2 = \sqrt{u} - \sqrt{v}$; $x_3 = -\sqrt{u} + \sqrt{v}$; $x_4 = -\sqrt{u} - \sqrt{v}$ sînt rădăcini ale polinomului P.

Asemănarea acestei proprietăți cu cea anterioară pe care, în fapt, o generalizează este evidentă. Nu este deci cazul să o mai demonstrăm.

Exemplu. Să se rezolve ecuația cu coeficienți raționali

$$x^6 - 2x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 3 = 0$$

știind că are o rădăcină egală cu $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Dacă notăm $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, atunci, conform celor de mai înainte, sînt rădăcini și numerele $x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{3}$; $x_3 = -\sqrt{2} + \sqrt{3}$; $x_4 = -\sqrt{2} - \sqrt{3}$. Atunci, din formulele lui *Viète*

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 2$$

$$S_6 = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 = 3$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă

$$x_5 + x_6 = 2; \quad x_5 x_6 = 3$$

și deci rădăcinile x_5, x_6 sînt rădăcinile ecuației $x^2 - 2x + 3 = 0$ adică $x_5 = 1 + i\sqrt{2}$ și $x_6 = 1 - i\sqrt{2}$.

4. Să considerăm polinomul $P \in Q[x]$

$$P(x) = 2x^6 - \frac{4}{3}x^5 - \frac{23}{6}x^4 + \frac{7}{3}x^3 - \frac{19}{3}x^2 + 4x - \frac{1}{2}$$

pe care, scriindu-l descompus în factori de gradul al doilea, avem

$$P(x) = \left(2x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{6}\right)(x^2 - 3)(x^2 + 1)$$

și am obținut în felul acesta o descompunere a polinomului dat P în trei factori care sînt tot polinoame din $Q[x]$. Cu privire la acești factori să adăugăm următoarele observații.

a) — polinomul $P_1(x) = 2x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{6}$ se mai poate scrie descompus în factori liniari sub forma

$$P_1(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(2x - \frac{1}{3}\right)$$

adică sub forma unui produs de factori ireductibili tot din $Q[x]$;

b) — polinomul $P_2(x) = x^2 - 3$ se poate descompune în factori liniari sub forma

$$P_2(x) = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

deci sub forma unui produs de factori ireductibili care nu mai aparțin mulțimii $Q[x]$, ci se găsesc în $R[x]$;

c) — polinomul $P_3(x) = x^2 + 1$ care în mod evident este ireductibil în $R[x]$, se poate descompune sub forma

$$P_3(x) = (x + i)(x - i), \; i^2 = -1,$$

deci, a unui produs de factori ireductibili din $\mathcal{C}[x]$.

Aceste observații ne arată că, problema descompunerii unui polinom în factori ireductibili este intim legată de mulțimea de polinoame în care vrem să facem descompunerea; un polinom poate fi ireductibil într-o anumită familie de polinoame, dar poate fi reductibil într-o altă familie.

Scanned with OKEN Scanner

§ 2. RĂDĂCINILE POLINOAMELOR DIN $Z[x]$.

Ținînd seamă de observația preliminară făcută la începutul acestui capitol, deoarece orice polinom $P \in Q[x]$ se poate pune sub forma

$$P = c \cdot P^*, \; c = \text{constantă nenulă};$$

$$P^* \in Z[x]$$

este clar că problemele care privesc rădăcinile polinoamelor din $Q[x]$ sînt practic identice cu cele care privesc rădăcinile polinoamelor din $Z[x]$. Vom reaminti în această privință cîteva rezultate cunoscute, deosebit de importante în aplicații.

1. Dacă $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ este un polinom din $Z[x]$ atunci, rădăcinile sale raționale sînt de forma $\frac{p}{q}$, p fiind un divizor al termenului liber a_n, iar q fiind un divizor al coeficientului dominant a_0.

În particular, rădăcinile întregi ale lui P se găsesc printre divizorii termenului liber.

Atragem atenția că cele afirmate au sens de condiții necesare, dar care nu sînt suficiente. (Nu orice numere avînd caracteristicile menționate sînt rădăcini pentru P).

2. Dacă P are coeficientul dominant $a_0 = 1$, atunci eventualele sale rădăcini raționale sînt în mod necesar numere întregi.

Acest rezultat este o consecință imediată a celui precedent.

3. Pentru determinarea unui interval cît mai mic care conține toate rădăcinile reale ale unui polinom $P \in Z[x]$ se folosește de obicei metoda grupării termenilor, pe care o reamintim.

Se scrie polinomul P sub forma unei sume de polinoame formate cu termenii polinomului dat P, astfel ca fiecare termen al sumei să conțină o singură variație de semn pentru coeficienții săi. Se caută, pentru fiecare astfel de termen cel mai mic număr pozitiv pentru care valorea sa numerică este pozitivă, iar cel mai mare dintre numerele astfel obținute (notat, de pildă, L) constituie o margine superioară a rădăcinilor pozitive ale polinomului P. Pentru a calcula o margine inferioară a rădăcinilor negative, se află o margine superioară a rădăcinilor pozitive ale poli-

Scanned with OKEN Scanner

nomului $P(-x)$, iar dacă aceasta este de pildă L', atunci marginea inferioară a rădăcinilor negative ale polinomului dat este $-L'$.

Exemplu. Fie $P(x) = 2x^6 + 4x^5 - 5x^4 + 7x^3 - x^2 - 9x - 42$

Avem

$$P(x) = (2x^6 + 4x^5 - 5x^4) + (7x^3 - x^2 - 9x - 42) =$$
$$= x^4(2x^2 + 4x - 5) + (7x^3 - x^2 - 9x - 42)$$

și cum:

$$2x^2 + 4x - 5 > 0 \text{ pentru } x \geqslant 1$$
$$7x^3 - x^2 - 9x - 42 > 0 \text{ pentru } x \geqslant 3$$

vom lua drept margine superioară a rădăcinilor polinomului P numărul $L = 3$.

Apoi

$$P(-x) = 2x^6 - 4x^5 - 5x^4 - 7x^3 - x^2 + 9x - 42$$

și vom lua

$$P(-x) = (2x^6 - 4x^5 - 5x^4 - 7x^3 - x^2) + (9x - 42) =$$
$$= x^2(2x^4 - 4x^3 - 5x^2 - 7x - 1) + (9x - 42)$$

Deoarece $2x^4 - 4x^3 - 5x^2 - 7x - 1 > 0$ pentru $x \geqslant 4$ și

$$9x - 42 > 0 \text{ pentru } x \geqslant 5$$

vom avea $L' = 5$ și deci $-L' = -5$.

Așadar, rădăcinile reale ale polinomului P sînt cuprinse în intervalul $(-5, 3)$.

4. În cazul rădăcinilor întregi, dacă intervalul obținut ca mai înainte conține totuși un număr prea mare de divizori ai termenului liber, atunci unii dintre aceștia pot fi eliminați prin diferite procedee cum ar fi, de pildă, următorul:

Considerăm polinomul $P(x) \in Z[x]$ și scriem identitatea împărțirii lui prin $x - 1$. Vom avea

$$P(x) = (x - 1) \cdot C(x) + R \text{ unde}$$
$$C \in Z[x], \; R = P(1)$$

și prin urmare $\dfrac{P(x)}{x-1} = C(x) + \dfrac{P(1)}{x-1}$.

Dacă $x = a$ (a = divizor al termenului liber) este o rădăcină a lui P, atunci $P(a) = 0$ și vom avea

$$\frac{P(1)}{a-1} = -C(a)$$

și cum $C(a)$ este un număr întreg, rezultă că $a - 1$ este un divizor al numărului $P(1)$. Aceasta înseamnă că dintre divizorii termenului liber cuprinși în intervalul $(-L', L)$ îi eliminăm pe cei care nu satisfac această cerință.

Analog, în cazul în care folosim factorul liniar $x + 1$, este necesar ca numărul $a + 1$ să fie un divizor al lui $P(-1)$.

Exemplu. Dacă $P(x) = x^4 - 12x^3 + x^2 + x - 126$ obținem intervalul $(-3, 12)$ și trebuie să considerăm mulțimea de divizori $\{-2, -1, 1, 2, 3, 6, 7, 9\}$.

Cum $P(1) = -135$, rezultă, pe de o parte că $x = 1$ nu este rădăcină, iar pe de altă parte, că dintre divizorii de mai sus se vor elimina numerele: $a \in \{-1, 3, 7, 9\}$ pentru care $a - 1$ ne dă respectiv $-2, 2, 6, 8$ care nu divid pe 135. Așadar mulțimea numerelor susceptibile de a fi rădăcini întregi ale polinomului P se restrînge la $\{-2, 2, 6\}$.

Dacă în continuare mai luăm și $P(-1) = -113$ atunci, cum $a + 1 \in \{-1, 3, 7\}$, iar numerele 3 și 7 nu divid pe 113 rezultă că singurul număr întreg care ar putea fi rădăcină a lui P este $x = -2$, care însă nu verifică ecuația $P(x) = 0$.

Așadar, P nu are rădăcini întregi.

Observație. Dacă $P(1) = 0$ atunci $x = 1$ este rădăcină a lui P, iar dacă p este ordinul său de multiplicitate, vom aplica cele de mai înainte polinomului cît $Q(x) = \frac{P(x)}{(x-1)^p}$. Analog în cazul cînd $P(-1) = 0$, pentru polinomul cît $Q(x) = \frac{P(x)}{(x+1)^p}$.

5. Să presupunem acum că $x = a$ este o rădăcină întreagă a polinomului $P \in Z[x]$. Atunci vom avea

$$P(x) = (x - a)\, C(x) \text{ unde } C \in Z[x].$$

Să mai presupunem că x_0 este un număr întreg pentru care valoarea numerică $P(x_0)$ a polinomului P este un număr impar, deci $P(x_0) = 2q + 1$, $q \in Z$.

Atunci vom avea

$$(x_0 - a) \cdot C(x_0) = 2q + 1$$

de unde se vede că numărul $x_0 - a$, care este un divizor al numărului impar $2q + 1$, va fi el însuși un număr impar. Aceasta înseamnă că numerele x_0 și a sînt de parități diferite. Prin urmare, *dacă* $P \in Z[x]$ *și* $x_0 \in Z$, *iar* $P(x_0)$ *este un număr impar, atunci polinomul* P *nu are rădăcini întregi de aceeași paritate cu* x_0.

În particular, dacă $P(0)$ și $P(1)$ sînt numere impare, atunci P nu are rădăcini întregi, deoarece el nu are nici rădăcini pare (de aceeași paritate cu 0) și nici rădăcini impare (de aceeași paritate cu 1).

Dar, dacă $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ atunci

$$P(0) = a_n;\ P(1) = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n,$$

iar condițiile ca numerele $P(0)$ și $P(1)$ să fie impare, implică:

$$a_n = \text{număr impar};\ a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} = \text{număr par}$$

și cum paritatea unei sume de numere întregi depinde de numărul termenilor impari din suma respectivă (suma fiind pară dacă există în ea un număr par de termeni impari și fiind impară dacă ea conține un număr impar de termeni impari) rezultă că: *un polinom* $P \in Z[x]$ *care are termenul liber impar, iar printre ceilalți coeficienți există un număr par de coeficienți impari, nu are rădăcini întregi.*

În particular, un polinom $P \in Z[x]$ care are doar un singur coeficient impar, iar acela este termenul liber, nu are rădăcini întregi.

Exemple

$$P_1(x) = x^{12} + 6x^{10} - 9x^8 + 7x^5 - x + 17$$

are termenul liber 17 și 4 coeficienți impari: 1, —9, 7, —1;

$$P_2(x) = 2x^{16} - 8x^7 + 6x^3 + 4x^2 - 10x + 15$$

are toți coeficienții pari, cu excepția ultimului care este impar.

Cele două polinoame nu au rădăcini întregi.

§ 3. CÎTEVA FAMILII DE POLINOAME SPECIALE DIN $K[x]$.

Ne vom ocupa în cele ce urmează de cîteva familii de polinoame speciale din $K[x]$, larg utilizate într-o seamă de aplicații.

Scanned with OKEN Scanner

1. *Polinoamele lui Legendre.* Acestea reprezintă o familie $\{P_n\}_{n\in N}$ de polinoame cu coeficienți raționali (pentru o mai amplă informare asupra lor recomandăm lucrarea lui N. Lebedev, *Funcții speciale și aplicațiile lor*, Edit., Tehnică, București, 1957), care se definesc în felul următor

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$$

iar pentru $n = 2, 3, 4, \ldots$ prin relația de recurență

$$(1)\quad nP_n(x) - (2n-1)xP_{n-1}(x) + (n-1)\cdot P_{n-2}(x) = 0.$$

Din această relație deducem

pentru $n = 2$ $\quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

pentru $n = 3$ $\quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

și așa mai departe[1]. Prin inducție completă deducem ușor că aceste polinoame aparțin inelului $Q[x]$.

Dacă notăm cu $P'_n(x)$ derivata lui $P(x)$ vom demonstra prin inducție completă următoarea egalitate (în fapt este vorba despre o identitate).

$$(2)\quad (1-x^2)\cdot P'_n(x) + nxP_n(x) - nP_{n-1}(x) = 0, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Pentru $n = 1$ avem

$$(1-x^2)P_1(x) + xP_1(x) - P_0(x) = 1 - x^2 + x^2 - 1 = 0$$

Presupunem în continuare că egalitatea (2) este adevărată și o scriem sub forma

$$(2')\quad P'_n(x) = \frac{n[P_{n-1}(x) - xP_n(x)]}{1-x^2}.$$

Vom demonstra că

$$(3)\quad P'_{n+1}(x) = \frac{(n+1)[P_n(x) - xP_{n+1}(x)]}{1-x^2}.$$

---

[1] Forma lor generală se deduce din formula generică

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \quad n = 0, 1, 2,$$

Pentru aceasta, în relația (1) de definiție înlocuind n cu $n+1$ și derivînd obținem

$$(4)\quad (n+1)P'_{n+1}(x) - (2n+1)P_n(x) - (2n+1)xP'_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$$

Dar, ținînd seamă de (1) relația (2') devine

$$P'_n(x) = \frac{(2n+1)x \cdot P_n(x) - (n+1) \cdot P_{n+1}(x) - nxP_n(x)}{1-x^2}$$

sau

$$(5)\qquad P'_n(x) = \frac{(n+1)[xP_n(x) - P_{n+1}(x)]}{1-x^2}$$

Înlocuind aici n cu $n-1$ obținem

$$P'_{n-1}(x) = \frac{n[xP_{n-1}(x) - P_n(x)}{1-x^2}$$

și ținînd din nou seamă de (1) avem

$$P'_n(x) = \frac{x[(2n+1)xP_n(x) - (n+1)P_{n+1}(x)] - nP_n(x)}{1-x^2}$$

sau

$$(6)\quad P'_{n-1}(x) = \frac{[(2n+1)x^2 - n]P_n(x) - x(n+1)xP_{n+1}(x)}{1-x^2}.$$

Introducînd rezultatele (5) și (6) în (4) deducem

$$(n+1)P'_{n+1}(x) =$$

$$= (2n+1)P_n(x) + \frac{(n+1)(2n+1)x[xP_n(x) - P_{n+1}(x)]}{1-x^2} -$$

$$- \frac{n[(2n+1)x^2 - n]P_n(x) - n(n+1)xP_{n+1}(x)}{1-x^2}$$

sau

$$(n+1)P'_{n+1}(x) =$$

$$= \frac{[(2n+1)(1-x^2) + (n+1)(2n+1)x^2 - n(2n+1)x^2 + n^2]P_n(x)}{1-x^2} -$$

$$- \frac{[(n+1)(2n+1)x - n(n+1)x]P_{n+1}(x)}{1-x^2} =$$

$$= \frac{(n+1)^2P_n(x) - (n+1)^2xP_{n+1}(x)}{1-x^2}$$

de unde

$$P'_{n+1}(x) = \frac{(n+1)[P_n(x) - xP_{n+1}(x)]}{1 - x^2}$$

tocmai relația (3) pe care voiam să o demonstrăm.

Cu ajutorul teoremei lui *Sturm* vom arăta acum că oricare polinom *Legendre* are toate rădăcinile reale. Pentru aceasta vom arăta mai întîi că polinoamele

$$P_n, P_{n-1}, \ldots, P_1, P_0$$

formează un șir *Sturm*.

1. Oricare două polinoame consecutive P_k, P_{k-1} $(k = 1, 2, \ldots, n)$ nu au rădăcini comune. Într-adevăr, dacă $x = x_0$ ar fi o rădăcină comună a lor, conform relației de definiție (1), ea ar fi rădăcină și pentru P_{k-2} și prin recurență, în cele din urmă ar rezulta că ea este rădăcină a lui $P_0(x) = 1$. Absurd!

2. Ultimul polinom din șir fiind $P_0(x) = 1$ are semn constant.

3. Dacă $x = x_0$ este o rădăcină a unui polinom $P_{k-1}(k = 2, 3, \ldots, n)$ atunci din relația

$$kP_k(x) - (2k-1)x \cdot P_{k-1}(x) + (k-1)P_{k-2}(x) = 0$$

deducem

$$k \cdot P_k(x_0) + (k-1)P_{k-2}(x_0) = 0, \quad k = 2, 3, \ldots, n$$

de unde se vede că numerele $P_k(x_0)$ și $P_{k-2}(x_0)$ sînt de semne contrare.

4. Să presupunem că $x_0 \in (-1, 1)$ este o rădăcină a polinomului $P(x)$. Atunci din identitatea (2) rezultă că

$$(1 - x_0^2) \cdot P'_n(x_0) = nP_{n-1}(x_0)$$

ceea ce ne arată că numerele $P_{n-1}(x_0)$ și $P'_n(x_0)$ au același semn. Atunci conform observației făcute cînd am demonstrat modul de a construi un șir *Sturm* atașat unui polinom, condiția 4) este satisfăcută.

Așadar, șirul la care ne-am referit reprezintă într-adevăr un șir de polinoame *Sturm*.

Pentru a demonstra acum ceea ce ne-am propus și anume că oricare polinom *Legendre* are toate rădăcinile reale vom face următoarele observații:

Scanned with OKEN Scanner

Din identitatea (2) avem:

— pentru $x = -1$; $P_n(-1) = -P_{n-1}(-1)$

— pentru $x = 1$; $P_n(1) = P_{n-1}(1)$

$n = 1, 2, \ldots$

ceea ce ne arată că șirul de numere

$$P_n(-1)\ P_{n-1}(-1) \ldots P_2(-1)\ P_1(-1)$$

prezintă cîte o variație între oricare doi termeni consecutivi ai săi, în timp ce șirul de numere

$$P_n(1)\ P_{n-1}(1) \ldots P_2(1)\ P_1(1)$$

prezintă numai permanențe.

Cum grad $P_n(x) = n$ deducem că P_n are n rădăcini reale, iar acestea sînt cuprinse în intervalul $(-1, 1)$.

Observație. Această aplicație ne arată că teorema lui *Sturm* este eficace și în cazul unor familii de polinoame date prin relații de recurență, fără să fie nevoie a cunoaște explicit toate polinoamele din familia respectivă.

2. *Polinoamele lui Hermite*

Se definesc generic prin relația

$$H_m(x) = (-1)^m\, e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{d^m e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^m}\ ;\quad m \in N$$

și avem

pentru $m = 0$, $H_0(x) = 1$

pentru $m = 1$, $H_1(x) = x$

pentru $m = 2$, $H_2(x) = x^2 - 1$

ș.a.m.d.

Oricare trei polinoame *Hermite* consecutive H_m, H_{m-1}, H_{m-2} $(m \in N)$ verifică relația

(1) $$H_m(x) = x \cdot H_{m-1}(x) - (m-1)H_{m-2}(x)$$

Într-adevăr, prin inducție completă, pentru $m = 2$, identitatea (1) devine

$$H_2(x) = x \cdot H_1(x) - H_0(x)$$

evidentă, conform celor de mai înainte.

Scanned with OKEN Scanner

Să presupunem acum că

$$H_m(x) = xH_{m-1}(x) - (m-1)H_{m-2}(x)$$

și să demonstrăm că

$$H_{m+1}(x) = x \cdot H_m(x) - m \cdot H_{m-1}(x)$$

Mai întîi să observăm că din definiția polinoamelor *Hermite* rezultă că

$$\frac{d^m e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^m} = (-1)^m \cdot H_m(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{2}$$

și prin urmare avem succesiv

$$H_{m+1}(x) = (-1)^{m+1} e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{d^{m+1} e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^{m+1}} =$$

$$= (-1)^{m+1} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx}\left(\frac{d^m e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^m}\right) = (-1)^{m+1} e^{\frac{x^2}{2}} \cdot$$

$$\cdot \frac{d}{dx}\left[(-1)^m H_m(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right] =$$

$$= -e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{d}{dx}\left\{e^{-\frac{x^2}{2}} [x \cdot H_{m-1}(x) - (m-)H_{m-2}(x)]\right\} = -e^{\frac{x^2}{2}} \cdot$$

$$\cdot \frac{d}{dx}\left[(-1)^{m-1} \cdot x \cdot \frac{d^{m-1} e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^{m-1}} - (-1)^{m-2} \cdot (m-1) \frac{d^{m-2} e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^{m-2}}\right] =$$

$$= (-1)^m e^{\frac{x^2}{2}}\left[\frac{d^{m-1} e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^{m-1}} + x \cdot \frac{d^m e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^m} + (m-1)\frac{d^{m-1} e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^{m-1}}\right] =$$

$$= x \cdot (-1)^m \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{d^m e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^m} - (-1)^{m-1} \cdot m \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{d^{m-1} e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^{m-1}} =$$

$$= x \cdot H_m(x) - m \cdot H_{m-1}(x)$$

tocmai ceea ce voiam să arătăm.

Cu ajutorul identității (1), procedînd prin inducție completă rezultă ușor că polinoamele *Hermite* fac parte din inelul $Z[x]$ și au coeficientul dominant egal cu unu.

Scanned with OKEN Scanner

Să mai observăm însă că dacă în (2) mai derivăm odată obținem

$$\frac{d^{m+1} e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^{m+1}} = (-1)^m \frac{d}{dx}\left[H_m(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right] =$$

$$= (-1)^m \cdot H'_m(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - (-1)^m \cdot x \cdot H_m(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Dar, conform aceleiași formule (2) avem

$$\frac{d^{m+1} e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^{m+1}} = (-1)^{m+1} H_{m+1}(x) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

astfel încît egalînd ultimele două rezultate, deducem identitatea

$$H'_m(x) = x \cdot H_m(x) - H_{m+1}(x). \tag{3}$$

Vom demonstra acum cu ajutorul teoremei lui *Sturm* că polinoamele *Hermite* H_m, $m = 1, 2, \ldots$, au toate rădăcinile reale. Pentru aceasta vom arăta mai întîi că șirul

$$H_m(x),\ H_{m-1}(x), \ldots, H_2(x),\ H_1(x),\ H_0(x)$$

este un șir *Sturm*.

Într-adevăr,

a) — două polinoame consecutive H_k, H_{k-1}, $k=2, 3, \ldots, m$ nu pot avea vreo rădăcină comună pentru că, ținînd seamă de identitatea (1), aceasta ar fi rădăcină și pentru H_{k-2}; din aproape în aproape ar rezulta că ea ar fi rădăcină și pentru $H_0(x) = 1$.

b) — ultimul polinom din șir are semn constant, el fiind $H_0(x) = 1$;

c) — dacă $x = x_0$ este rădăcină pentru polinomul H_{k-1}, $k = 2, 3, \ldots, m$ atunci din (1) rezultă că

$$H_k(x_0) = -(m-1) H_{k-2}(x_0), \quad k = 2, 3, \ldots m$$

adică numerele $H_0(x_0)$ și $H_{k-2}(x_0)$ sînt de semne contrare;

d) — dacă în (1) înlocuim m cu $m+1$ obținem

$$H_{m+1}(x) = x \cdot H_m(x) - m \cdot H_{m-1}(x)$$

rezultat pe care comparîndu-l cu (3) ne dă

$$H'_m(x) = m \cdot H_{m-1}(x)$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$\operatorname{sgn} H_m(x) = \operatorname{sgn} H_{m-1}(x) \text{ pentru orice } x \in \mathbf{R}.$$

Pentru a răspunde la ceea ce ne-am propus și anume că toate rădăcinile polinoamelor H_m sînt reale, vom ține seamă că, întrucît acestea sînt de forma

$$H_m(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$$

rezultă că

$$H_m(-\infty) = (-\infty)^m; \quad H_m(\infty) = \infty$$

de unde se vede că în

$$H_m(-\infty),\ H_{m-1}(-\infty),\ \ldots,\ H_1(-\infty),\ H_0(-\infty)$$

există numai variații, iar în

$$H_m(\infty),\ H_{m-1}(\infty),\ \ldots,\ H_1(\infty),\ H_0(\infty)$$

există numai permanențe.

Rezultă deci că $V(-\infty) - V(-\infty) = m$, adică H_m are m rădăcini reale.

3. *Polinoamele lui Cebîșev*[1]

Se definesc prin

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \text{ unde } x \in [-1, 1].$$

Dacă substituim $x = \cos \alpha$ atunci

$$T_n(x) = \cos n\alpha = \cos^n \alpha - C_n^2 \cos^{n-2} \alpha \cdot \sin^2 \alpha + C_n^4 \cos^{n-4} \alpha \cdot \sin^4 \alpha - \ldots$$

adică

$$T_n(x) = x^n - C_n^2 x^{n-2}(1 - x^2) + C_n^4 x^{n-4}(1 - x^2)^2 - \ldots$$

sau

$$T_n(x) = \sum_{\substack{2k \leqslant n \\ k = 0, 1, 2, \ldots}} (-1)^k C_n^{2k} x^{n-2k} (1 - x^2)^k$$

ceea ce înseamnă în definitiv

$$T_n(x) = \sum_{\substack{2k \leqslant n \\ k = 0, 1, 2, \ldots}} C_n^{2k} x^{n-2k} (x^2 - 1)^k.$$

---

[1] Polinoamele lui *Cebîșev* sînt de două specii. Cele de care ne ocupăm aici sînt polinoamele lui *Cebîșev* de prima specie.

Scanned with OKEN Scanner

Dar, dezvoltînd paranteza obținem

$$T_n(x) = \sum_{k=0,1,2,\ldots}^{2k \leqslant n} C_n^{2k}\, x^{n-2k}\,(x^{2k} - C_k^1 x^{2k-2} + \ldots) =$$

$$= \sum_{k=0,1,2,\ldots}^{2k \leqslant n} C_n^{2k}(x^n - C_n^1\, x^{n-2} + \ldots) =$$

$$= x^n \sum_{k=0,1,2,\ldots}^{2k \leqslant n} C_n^{2k} - x^{n-2} \sum_{k=0,1,2,\ldots}^{2k \leqslant n} C_n^{2k} C_k^1 + \ldots$$

Așadar, T_n sînt polinoame cu coeficienți întregi care au coeficientul dominant egal cu

$$\sum_{k=0,1,2,\ldots}^{2k \leqslant n} C_n^{2k} = 2^{n-1}.$$

Să adăugăm observația că dacă se consideră expresia

$$E(x) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n \text{ cu } x \in [-1, 1]$$

atunci, substituind $x = \cos t$, obținem

$$E(x) = (\cos t + \mathrm{i} \sin t)^n + (\cos t - \mathrm{i} \sin t)^n =$$

$$= \cos nt + \mathrm{i} \sin nt + \cos nt - \mathrm{i} \sin nt = 2 \cos nt$$

adică

$$E(x) = 2 \cos (n \arccos x)$$

ceea ce ne arată că expresia $E(x)$ reprezintă polinoamele lui *Cebîșev* de prima specie (evident, se poate face abstracție de factorul constant 2) și deci, în funcție de nevoi, se poate considera pentru acestea fie forma dată prin definiție, fie forma

$$T_n(x) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n.$$

Vom pune în evidență cîteva proprietăți ale lor.

1) Oricare trei polinoame *Cebîșev* consecutive T_{n-1}, T_n, T_{n+1}, $n = 1, 2, 3, \ldots$ satisfac relația de recurență

$$T_{n+1}(x) - 2x T_n(x) + T_{n-1}(x) = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr,

$$T_{n-1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = [T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)] -$$

$$- 2x\, T_n(x) = \{\cos [(n+1) \arccos x] + \cos [(n-1) \arccos x]\} -$$

$$- 2x \cdot T_n(x) = 2 \cos (n \arccos x) \cdot \cos (\arccos x) - 2xT_n(x) =$$

$$= 2T_n(x) \cdot x - 2x \cdot T_n(x) = 0.$$

2) Două polinoame T_m și T_n satisfac

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} T_m(x) \cdot T_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 \text{ dacă } m \neq n \\ \frac{\pi}{2} \text{ dacă } m = n \neq 0 \\ \pi \text{ dacă } m = n = 0 \end{cases}$$

Într-adevăr,

— dacă $m \neq n$, atunci

$$T_m(x) \cdot T_n(x) = \cos (m \arccos x) \cdot \cos (n \arccos x) =$$

$$= \frac{1}{2} \{\cos [(m + n) \arccos x] + \cos [(m - n) \arccos x]\}$$

și vom avea

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} T_m(x) \cdot T_n(x) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \int_{-1}^{1} \frac{\cos [(m + n) \arccos x]}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx + \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^{1} \frac{\cos [(m - n) \arccos x]}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin [(m + n) \arccos x]}{m + n} \Big|_{-1}^{1} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin [(m - n) \arccos x]}{m - n} \Big|_{-1}^{1} \right\} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (m + n)\pi}{m + n} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin (m - n)\pi}{m - n} \right] = 0.$$

— dacă $m = n \neq 0$ atunci

$$T_m(x) \cdot T_n(x) = T_m^2(x) = \cos^2 (n \arccos x) =$$

$$= \frac{1 + \cos (2n \arccos x)}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

și prin urmare

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} T_n(x) \cdot T_n(x) = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^{1} \frac{\cos(2m \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\arcsin x \Big|_{-1}^{1} - \frac{\sin(2m \arccos x)}{2m}\Big|_{-1}^{1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2m\pi}{2m}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

— dacă $m = n = 0$ atunci

$$T_m(x) = T_n(x) = 1$$

și vom avea

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} T_m(x) \cdot T_n(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \arcsin x \Big|_{-1}^{1} = \pi.$$

Datorită egalității

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot T_m(x) \cdot T_n(x) = 0 \quad \text{pentru } m \neq n$$

spunem că polinoamele *Cebîșev* T_m și T_n sînt ortogonale cu ponderea $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ dacă $m \neq n$.

3) Dacă acum derivăm funcția polinomială T_n obținem

$$T_n'(x) = n\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) +$$

$$+ n\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

de unde

$$T_n'(x) \cdot \sqrt{x^2-1} = n\left[\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n - \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right],$$

Scanned with OKEN Scanner

iar dacă derivăm din nou avem

$$T_n''(x) \cdot \sqrt{x^2-1} + T_n'(x) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \frac{n^2}{\sqrt{x^2-1}} [(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n]$$

adică

$$(x^2-1) \cdot T_n''(x) + x \cdot T_n'(x) = n^2 \cdot T_n(x).$$

Dacă acum derivăm această relație avem

$$2x \cdot T_n''(x) + (x^2-1) \cdot T_n'''(x) + T_n'(x) + x \cdot T_n''(x) = n^2 T_n'(x)$$

adică

$$(x^2-1) \cdot T_n'''(x) + 3x \cdot T_n''(x) = (x^2-1) \cdot T_n'(x).$$

Atunci, arătăm prin inducție completă că

$$(1) \quad (x^2-1) \cdot T_n^{(k+2)}(x) + (2k+1) \cdot x\, T_n^{(k+1)}(x) =$$
$$= (n^2-k^2) T_n(x), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-2,$$

Într-adevăr pentru $k=0$, $k=1$ relația a fost arătată mai înainte, iar dacă admitem (1), atunci derivînd-o încă odată rezultă

$$(x^2-1) \cdot T_n^{(k+3)}(x) + (2k+3)x\, T_n^{(k+2)}(x) =$$
$$= [n^2-(k+1)^2] T_n^{(k+1)}(x).$$

Cu ajutorul relației (1) arătăm că oricare ar fi $n = 1, 2, 3, \ldots$ polinomul T_n are toate rădăcinile reale, iar acestea sînt cuprinse în intervalul $(-1, 1)$. Pentru aceasta utilizăm teorema lui *Sturm*, pe care o aplicăm șirului

$$T_n(x) : T_n(x), \; T_n(x), \ldots, T_n(x) = n! \sum_{k=0,1,2,\ldots}^{2k \leqslant n} C_n^{2k}$$

despre care afirmăm că este un șir *Sturm*. (Verificarea condițiilor se face ușor cu ajutorul relației (1) și o propunem ca exercițiu.)

Să observăm acum că tot din (1) rezultă

$$-(2k+1) T_n^{(k+1)}(-1) = (n^2-k^2) \cdot T_n^{(k)}(-1) \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$(2k+1) T_n^{(k+1)}(1) = (n^2-k^2) \cdot T_n^{(k)}(1) \qquad (n-1)$$

Scanned with OKEN Scanner

și prin urmare șirul de numere

$$T_n(-1),\ T_n'(-1),\ T_n''(-1),\ \ldots,\ T_n^{(n)}(-1)$$

prezintă cîte o variație între oricare doi termeni consecutivi ai săi, în timp ce șirul

$$T_n(1),\ T_n'(1),\ T_n''(1),\ \ldots,\ T_n^{(n)}(1)$$

conține numai numere de același semn.

Rezultă că polinomul T_n are n rădăcini reale, iar acestea sînt cuprinse în intervalul $(-1, 1)$.

În ce privește separarea și calculul efectiv al rădăcinilor polinoamelor T_n, care sînt foarte utile într-o seamă de aplicații, vom observa că din

$$T_n(x) = 0 \text{ adică } \cos(n \arccos x) = 0$$

avem

$$n \arccos x = (2k-1)\frac{\pi}{2} \text{ și } x = \cos(2k-1)\frac{\pi}{2n}$$

iar pentru $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ obținem cele n rădăcini

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{2n},\ x_2 = \cos\frac{3\pi}{2n},\ \ldots,\ x_n = \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}.$$

Deoarece valorile maximă, respectiv minimă ale polinomului $T_n(x)$ sînt

$$T_n(x) = 1;\quad T_n(x) = -1$$

căutînd valorile lui x în care sînt atinse aceste extreme, avem

$$\cos(n \arccos x) = \pm 1;\quad n \arccos x = k\pi$$

$$x = \cos\frac{k\pi}{n}.$$

$$\text{Atunci } T_n\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right) = \cos k\pi = \begin{cases} 1 \text{ pentru } k = \text{par} \\ -1 \text{ pentru } k = \text{impar} \end{cases}$$

Variația funcției $T_n(x)$ se prezintă deci sub forma unei oscilații între -1 și 1 și este prezentată în tabelul următor

x	$\cos 0 = 1$		$\cos\frac{\pi}{n}$		$\cos\frac{2\pi}{n}$		$\cos\frac{3\pi}{n}$	$\ldots$
$T_n(x)$	1	↘	-1	↗	1	↘	-1	↗

Scanned with OKEN Scanner

Aplicații ale polinoamelor lui Cebîșev

Polinoamele *Cebîșev* joacă un rol foarte important în problema aproximării funcțiilor. Vom prezenta în continuare o categorie de astfel de probleme și anume cele referitoare la abaterea de la zero a unor polinoame.

Definiție. Numim abaterea de la zero a funcției f pe un segment $[a, b]$, valoarea maximă a modulului acestei funcții cînd argumentul său parcurge segmentul $[a, b]$.

Deci, dacă notăm cu δ abaterea de la zero a funcției f pe segmentul $[a, b]$ avem

$$\delta = \text{Max } f(x) \text{ pentru } x \in [a, b].$$

Este evident că studierea abaterii de la zero a unei funcții de-a lungul unui interval este o problemă de interes practic. Pentru că, dacă funcția respectivă este o diferență de alte două funcții, de pildă

$$f(x) = h(x) - g(x)$$

atunci, studiul abaterii de la zero a funcției f pe $[a, b]$ este echivalent cu studiul modului în care, pe segmentul respectiv, funcțiile h și g se pot aproxima una prin alta.

A. În legătură cu aceste lucruri vom rezolva pentru început următoarea problemă.

Să se determine trinomul de gradul al doilea de forma $x^2 + px + q$ *a cărui abatere de la zero pe segmentul* $[-1, 1]$ *este minimă.*

Reamintind mai întîi că pentru un trinom de gradul al doilea $ax^2 + bx + c$ există un minim dacă $a > 0$, care este egal cu $-\frac{\Delta}{4a}$ (Δ fiind discriminantul $b^2 - 4ac$) și este atîns în $x = -\frac{b}{2a}$, în problema de față vom avea

$$\min (x^2 + px + q) = \frac{4q - p^2}{4} \text{ pentru } x = -\frac{p}{2}.$$

Pe de altă parte, știm că pe graficul funcției $P(x) = x^2 + px + q$ care este o parabolă, punctul $V\left(-\frac{p}{2}, \frac{4q - p^2}{4}\right)$ este vîrful parabolei. Atunci, cum în problemă considerăm

Scanned with OKEN Scanner

abaterea de la zero pentru $x \in [-1, 1]$, apare necesar să studiem separat cazurile:

$$a)\ \left|-\frac{p}{2}\right| \geqslant 1; \qquad b)\ \left|-\frac{p}{2}\right| \leqslant 1$$

corespunzătoare următoarelor situații grafice:

a) vîrful parabolei nu se află în interiorul benzii delimitate de paralelele $x = -1$; $x = 1$ la axa Oy;

b) vîrful parabolei se află în interiorul benzii respective.

a) Fie $\left|-\frac{p}{2}\right| \geqslant 1$ deci $|p| \geqslant 2$ și să notăm $P(1) = a$; $P(-1) = b$.

Vom presupune că vîrful parabolei se află la stînga dreptei $x = -1$, ceea ce nu este restrictiv asupra concluziilor la care vom ajunge, deoarece, dacă el se află la dreapta dreptei $x = 1$, raționamentul este analog. În acest caz graficul se prezintă ca în figura 2, iar abaterea de la zero a trinomului considerat pe $[-1, 1]$ va fi egală cu $\mathrm{Max}\ (|a|, |b|)$.

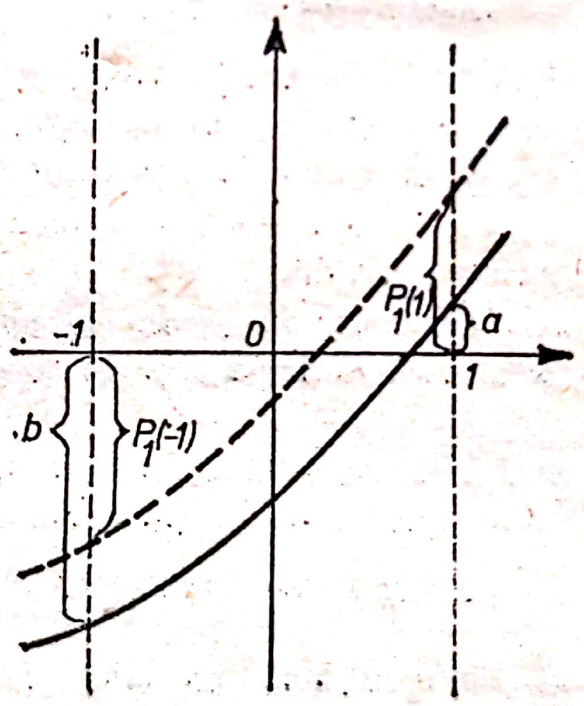

Fig. 2

Fie acum polinomul

$$P_1(x) = P(x) - \frac{a+b}{2} = x^2 + px + q - \frac{a+b}{2}$$

sau

$$P_1(x) = x^2 + px + q_1$$

unde am notat $q_1 = q - \frac{a+b}{2}$

luat astfel încît abaterea lui de la zero în punctele $x = -1$; $x = 1$ au aceeași valoare.

Într-adevăr,

$$P_1(-1) = P(-1) - \frac{a+b}{2} = b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2}$$

$$P_1(1) = P(1) - \frac{a+b}{2} = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}$$

și deci

$$|P_1(-1)| = |P_1(1)| = \left|\frac{a-b}{2}\right|.$$

Să observăm acum că abaterea de la zero a polinomului $P_1(x)$ nu este mai mare decît abaterea de la zero a polinomului $P(x)$, deoarece este adevărată inegalitatea

$$\left|\frac{a-b}{2}\right| \leqslant \text{Max } (|a|, |b|)^1$$

Atunci, dacă notăm cu α abaterea de la zero a polinomului $P(x)$ pe $[-1, 1]$ și cu β abaterea lui $P_1(x)$ pe același segment, vom avea

$$\alpha \geqslant \beta = \frac{|P_1(1) - P_1(-1)}{2} = \frac{(1 + p + q_1) - (1 - p + q_1)}{2} = |p|$$

și cum prin ipoteză $|p| \geqslant 2$, rezultă că $\alpha \geqslant 2$.

b) Fie $\left|-\frac{p}{2}\right| < 1$, deci $|p| < 2$, caz în care, după cum am văzut, vîrful parabolei se află în interiorul benzii delimitate de paralelele $x = -1$, $x = 1$ la axa Ox. Să mai presupunem (ceea ce nu afectează concluziile raționamentului) că vîrful se află în jumătatea din stînga a benzii respective (fig. 3), deci

$$-1 < -\frac{p}{2} \leqslant 0, \text{ adică } 0 \leqslant \frac{p}{2} < 1.$$

---

[1] Avem $|a - b| \leqslant |a| + |-b| = |a| + |b| \leqslant 2 \text{ Max } (|a|, |b|)$

Scanned with OKEN Scanner

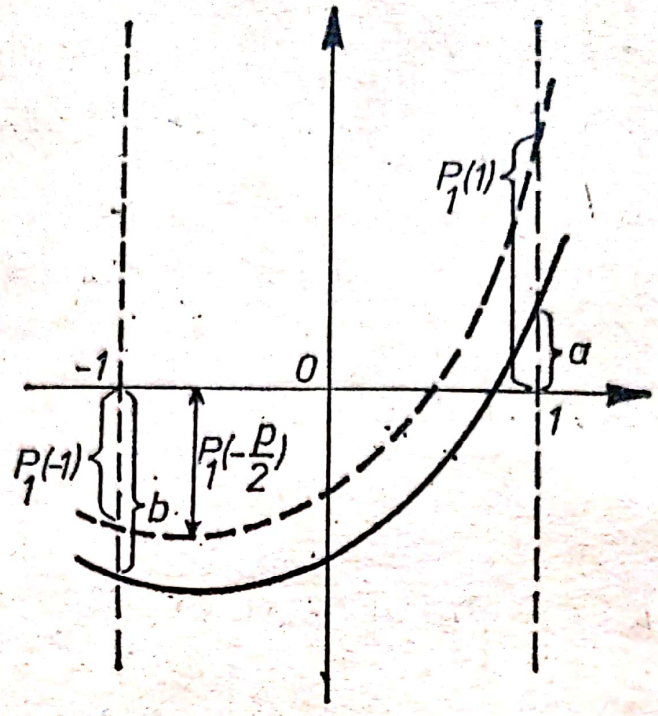

Fig. 3

Deoarece $x = -\frac{p}{2}$ reprezintă axa de simetrie a parabolei avem

$$\left| P(1) - P\left(-\frac{p}{2}\right)\right| \geqslant \left| P(-1) - P\left(-\frac{p}{2}\right)\right|.$$

Introducem și în acest caz un polinom auxiliar

$$P_1(x) = x^2 + px + q_1$$

determinat prin condiția ca abaterea sa în vîrful parabolei să fie egală cu abaterea sa în $x = 1$. Deci $P_1\left(-\frac{p}{2}\right) = -P_1(1)$ și folosind aceleași notații ca și în primul caz vom avea

$$\alpha \geqslant \beta = \frac{\left|P_1(1) - P_1\left(-\frac{p}{2}\right)\right|}{2} = \frac{\left|(1 + p + q_1) - \left(\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q_1\right)\right|}{2} =$$

$$= \frac{\left|\frac{p^2}{4} + p + 1\right|}{2} = \frac{\left(\frac{p}{2} + 1\right)^2}{2}$$

și cum prin ipoteză $0 \leqslant \frac{p}{2} < 1$, rezultă că abaterea de la zero va fi minimă pentru $p = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Atunci

$$\text{din } P_1\left(-\frac{p}{2}\right) = -P_1(1) \quad \text{rezultă } q_1 = -\frac{1}{2}.$$

În concluzie, cea mai mică abatere de la zero pe segmentul [—1, 1] o are polinomul

$$P_0(x) = x^2 - \frac{1}{2}$$

care este abaterea egală cu $\frac{1}{2}$.

B. Trecînd acum la cazul mai general al unui polinom de gradul n

$$P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

care are coeficientul dominant egal cu 1, demonstrăm că, *abaterea lui de la zero pe segmentul* [—1, 1] *nu poate fi mai mică decît* $\frac{1}{2^{n-1}}$; *ea este egală cu* $\frac{1}{2^{n-1}}$ *numai pentru polinomul* $\frac{1}{2^{n-1}} \cdot T_n(x)$.

Demonstrația o dăm prin reducere la absurd și vom presupune că abaterea de la zero a polinomului $P_n(x)$ pe segmentul [—1, 1] este mai mică decît $\frac{1}{2^{n-1}}$, deci

$$-\frac{1}{2^{n-1}} < P_n(x) < \frac{1}{2^{n-1}} \tag{1}$$

oricare ar fi $x \in [-1, 1]$.

Fie polinomul ajutător

$$R(x) = P_n(x) - \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) =$$

$$= x^n + a_1x^{n-1} + \ldots - \frac{1}{2^{n-1}}(2^{n-1}x^n + \ldots)$$

care, după cum se vede, are gradul cel mult $n - 1$.

Dar știm că

$$T_n\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } k = \text{par} \\ -1 \text{ pentru } k = \text{impar} \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

încît

$$(2)\qquad R\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)=\begin{cases} P_n\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)-\frac{1}{2^{n-1}} & \text{pentru } k=\text{par} \\ P_n\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)+\frac{1}{2^{n-1}} & \text{pentru } k=\text{impar} \end{cases}$$

de unde, conform inegalității (1), rezultă că

$$R\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)<0 \text{ pentru } k=\text{par}$$

$$R\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)>0 \text{ pentru } k=\text{impar}$$

Atunci variația semnelor lui R se prezintă ca în tabelul

k	0	1	2	3	...	$2m$	$2m+1$	...	$n-1$	n
$R\left(\cos\frac{k\pi}{n}\right)$	$-$	$+$	$-$	$+$	...	$-$	$+$	...	$(-1)^n$	$(-1)^{n+1}$

și deoarece $R(x)$ este o funcție continuă rezultă că ea are cel puțin o rădăcină în fiecare interval

$$\left(\cos\frac{m\pi}{n},\ \cos\frac{(m+1)\pi}{n}\right)\quad m\in\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ n-1\}.$$

Deducem că $R(x)$ are cel puțin n rădăcini în intervalul $(0,\ n)$, concluzie evident falsă deoarece am văzut că gradul polinomului $R(x)$ este cel mult $n-1$.

Am demonstrat astfel că abaterea de la zero a polinomului $P_n(x)$ nu poate fi mai mică decît $\frac{1}{2^{n-1}}$, deci

$$P_n(x)\geqslant\frac{1}{2^{n-1}}\quad \text{oricare ar fi } x\in[-1,\ 1].$$

Polinoamele $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ fiind de forma polinomului $P_n(x)$, vor avea și ele proprietatea pe care am demonstrat-o mai înainte. Vom demonstra însă că, *există un singur polinom* $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ *a cărui abatere de la zero în segmentul* $[-1,\ 1]$ *este egală cu* $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Într-adevăr, să presupunem prin absurd că mai există un polinom $P_n(x)$ tot de gradul n, avînd coeficientul dominant egal cu 1 și pentru care abaterea de la zero în $[-1, 1]$ este egală cu $\frac{1}{2^{n-1}}$. Fie din nou polinomul ajutător

$$R(x) = P_n(x) - \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$$

despre care am văzut că are gradul cel mult $n - 1$. Deoarece am arătat că

$$|P_n(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}} \quad x \in [-1, 1]$$

atunci, din (2) rezultă că

(3) $R(x) \leqslant 0$ pentru $x = \cos \frac{2k\pi}{n}$

$R(x) \geqslant 0$ pentru $x = \cos \frac{(2k+1)\pi}{n}$; unde $k \in N$.

Deducem de aci că $R(x)$ are cel puțin o rădăcină x_{k+1} în fiecare interval

$$\left[\cos \frac{k\pi}{n}, \cos \frac{(k+1)\pi}{n}\right] \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Dacă $x_{k+1} \in \left(\cos \frac{k\pi}{n}, \cos \frac{(k+1)\pi}{n}\right)$ $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ atunci rezultă că $R(x)$ are în $(0, n)$ cel puțin n rădăcini, ceea ce este absurd deoarece el are gradul cel mult $n - 1$. Atunci rădăcinile polinomului $R(x)$ trebuie să se afle în extremitățile intervalelor $\left[\cos \frac{k\pi}{n}, \cos \frac{(k+1)\pi}{n}\right]$ $k \in$ $\in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Dacă în fiecare extremitate s-ar afla cîte o rădăcină atunci

$$x_{k+1} = \cos \frac{k\pi}{n} \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

și $R(x)$ ar avea $n + 1$ rădăcini. Absurd! Deoarece grad $R(x) \leqslant n - 1$ rezultă că există cel puțin două puncte $\cos \frac{k_1\pi}{n}$, $\cos \frac{k_2\pi}{n}$ $k_1, k_2 \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ care nu sînt

rădăcini ale polinomului $R(x)$. Aceste puncte nu pot fi consecutive, căci atunci ele ar fi extremitățile unui interval de forma $\left[\cos\frac{k\pi}{n}, \cos\frac{(k+1)\pi}{n}\right]$ în care $R(x)$ nu ar avea nici o rădăcină, ceea ce contrazice rezultatul stabilit mai înainte.

Fie deci cele două puncte $\cos\frac{k_1\pi}{n}$, $\cos\frac{k_2\pi}{n}$ $k_1, k_2 \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ neconsecutive în care $R(x)$ nu se anulează, atunci celelalte $n-1$ valori de forma $\cos\frac{k\pi}{n}$ sînt rădăcini ale polinomului R. Vom distinge în continuare două cazuri:

a) Între $\cos\frac{k_1\pi}{n}$ și $\cos\frac{k_2\pi}{n}$ se mai află *o singură rădăcină a lui* $R(x)$, fie aceasta $x = \cos\frac{k_0\pi}{n}$.

Atunci, deoarece

$$R\left(\cos\frac{k_1\pi}{n}\right) \neq 0, \quad R\left(\cos\frac{k_2\pi}{n}\right) \neq 0$$

conform inegalităților (3) rezultă că

$R\left(\cos\frac{k_1\pi}{n}\right)$ și $R\left(\cos\frac{k_2\pi}{n}\right)$ au același semn. Presupunem că

$$R\left(\cos\frac{k_1\pi}{n}\right) < 0, \quad R\left(\cos\frac{k_2\pi}{n}\right) < 0$$

(în cazul $R\left(\cos\frac{k_1}{n}\right) > 0$, $R\left(\cos\frac{k_2}{n}\right) > 0$, raționamentul este analog) adică în intervalul

$$\left[\cos\frac{k_1\pi}{n}, \cos\frac{k_2\pi}{n}\right] = \left[\cos\frac{(k_0+1)\pi}{n}; \cos\frac{(k_0-1)\pi}{n}\right]$$

semnul funcției R se prezintă ca în tabelul următor:

x	$\cos\frac{k_1\pi}{n}$	$\cos\frac{k_0\pi}{n}$	$\cos\frac{k_2\pi}{n}$
$R(x)$	—	0	—

Spunem că $x_0 = \cos\frac{k_0\pi}{n}$ este o rădăcină dublă a lui $R(x)$.

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, dacă x_0 ar fi o rădăcină simplă funcția R ar trebui să-și schimbe semnul la trecerea prin aceasta. Atunci există o vecinătate $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ astfel încît

$$R(x) < 0 \quad \text{dacă} \quad x \in (x_0 - \varepsilon,\ x_0)$$
$$R(x) > 0 \quad \text{dacă} \quad x \in (x_0,\ x_0 + \varepsilon)$$

sau

$$R(x) > 0 \quad \text{dacă} \quad x \in (x_0 - \varepsilon,\ x_0)$$
$$R(x) < 0 \quad \text{dacă} \quad x \in (x_0,\ x_0 + \varepsilon)$$

ceea ce este în contradicție cu rezultatul

$$R(x) < 0 \text{ pentru } x \in \left(\cos\frac{k_1\pi}{n},\ \cos\frac{k_2\pi}{n}\right) - \left\{\cos\frac{k_0\pi}{n}\right\}$$

pus în evidență mai înainte.

Dacă x_0 este rădăcină dublă, cum ea este una din cele $n-1$ rădăcini ale polinomului $R(x)$ rezultă că, în fapt, acesta are n rădăcini, concluzie, evident, falsă.

b) Între $\cos\frac{k_1\pi}{n}$ și $\cos\frac{k_2\pi}{n}$ se găsesc *două rădăcini ale polinomului* $R(x)$, pe care le presupunem consecutive și le notăm $\cos\frac{k_0\pi}{n}$, $\cos\frac{(k_0+1)\pi}{n}$.

Vom considera intervalul

$$\left[\cos\frac{k_1\pi}{n},\ \cos\frac{k_2\pi}{n}\right] = \left[\cos\frac{(k_0-1)\pi}{n},\ \cos\frac{(k_0+2)\pi}{n}\right]$$

și cum numerele $k_1 = k_0 - 1,\ k_0,\ k_0 + 1,\ k_0 + 2 = k_2$ sînt consecutive rezultă că numerele k_1 și k_2 sînt de parități diferite. Atunci, conform inegalităților (3) numerele $R\left(\cos\frac{k_1\pi}{n}\right)$, $R\left(\cos\frac{k_2\pi}{n}\right)$, despre care știm că sînt nenule, vor fi de semne diferite. Presupunem că

$$R\left(\cos\frac{k_1\pi}{n}\right) < 0 \quad \text{și} \quad R\left(\cos\frac{k_2\pi}{n}\right) > 0$$

(în caz contrar raționăm analog).

Scanned with OKEN Scanner

Atunci, în intervalul $\left[\cos\frac{k_1\pi}{n}, \cos\frac{k_2\pi}{n}\right]$ semnul funcției R se prezintă ca în tabelul următor

x	$\cos\frac{k_1\pi}{n}$	$\cos\frac{k_0\pi}{n}$	$\cos\frac{k(_0+1)\pi}{n}$	$\cos\frac{k_2\pi}{n}$
$R(x)$	$-$	0	0	$+$

Dacă $x=\cos\frac{k_0\pi}{n}$ este rădăcină simplă a polinomului $R(x)$, atunci rezultă că $R(x)>0$ pentru $x\in\left(\cos\frac{k_0\pi}{n}, \cos\frac{(k_0+1)\pi}{n}\right)$ încît vom avea situația următoare

x	$\cos\frac{k_0\pi}{n}$		$\cos\frac{(k_0+1)}{n}$	$\cos\frac{k_2}{n}$
$R(x)$	0	$+$	0	$+$

ceea ce, asemănător raționamentului făcut în cazul a) ne arată că $x=\cos\frac{(k_0+1)\pi}{n}$ trebuie să fie rădăcină-dublă a lui $R(x)$.

Dacă presupunem că $x=\cos\frac{(k_0+1)\pi}{n}$ este rădăcină simplă atunci, la fel ca mai sus, deducem că $x=\cos\frac{k_0\pi}{n}$ este rădăcină dublă.

În concluzie, polinomul $R(x)$ are, în fapt, trei rădăcini în intervalul $\left[\cos\frac{k_1\pi}{n}, \cos\frac{k_2\pi}{n}\right]$, ceea ce înseamnă că numărul total al rădăcinilor sale este n. Absurd!

Dacă cele două rădăcini considerate nu sînt numere consecutive ale mulțimii de numere $\cos\frac{k\pi}{n}$, $k\in\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, atunci sau între ele se află un număr din această mulțime în care $R(x)$ nu se anulează și vom raționa ca în cazul a), sau între ele se mai află cel puțin o rădăcină și atunci raționăm ca în cazul b).

Rezultă deci că de fiecare dată sîntem conduși la un rezultat absurd și anume că $R(x)$ are cel puțin n rădăcini.

Scanned with OKEN Scanner

În felul acesta valabilitatea afirmației este complet demonstrată.

c) Există situații în care studierea abaterii de la zero a unui polinom nu se pune în raport cu mulțimea tuturor punctelor unui interval, ci în raport cu o mulțime finită de puncte. În acest caz dacă, de pildă, se dau punctele a_1, a_2, ..., a_n atunci vom numi abaterea de la zero în raport cu această mulțime de puncte a funcției f, numărul

$$\text{Max } \{|f(a_1)|, |f(a_2)|, \ldots, |f(a_p)|\},$$

altfel spus $\text{Max } \{|f(a_i)|\}$ $i = 1, 2, \ldots, p$.

Vom cerceta în cele ce urmează o astfel de problemă și anume:

Să se determine polinomul de gradul n *care are coeficientul dominant egal cu* 1, *a cărui abatere de la zero în mulțimea de puncte* $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ *are cea mai mică valoare posibilă.*

Pentru rezolvare vom introduce polinomul ajutător

$$Q(x) = P(0) \cdot \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{(0-1)(0-2)\ldots(0-n)} +$$

$$+ P(1) \cdot \frac{(x-0)(x-2)\ldots(x-n)}{(1-0)(1-2)\ldots(1-n)} +$$

$$+ P(2) \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-3)\ldots(x-n)}{(2-0)(2-1)(2-3)\ldots(2-n)} +$$

$$+ \ldots + P(n) \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-2)\ldots[x-(n-1)]}{(n-0)(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}.$$

Se vede ușor că

$$Q(k) = P(k) \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

pentru că în expresia lui $Q(x)$, oricare termen al sumei, cu excepția celui care conține pe $P(k)$, va conține în produsul de la numărător și factorul $x - k$. În plus, observînd că

$$(0-1)(0-2)\ldots(0-n) = (-1)^n \cdot n!$$

$$(1-0)(1-2)\ldots(1-n) = 1!(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$$

$$(2-0)(2-1)(2-3)\ldots(2-n) = 2!(-1)^n (n-2)!$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

vom avea

$$Q(k) = P(k) \cdot \frac{(-1)^{n-k} k!(n-k)!}{(-1)^{n-k} k!(n-k)!} = P(k), \; k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Atunci, considerînd polinomul

$$h(x) = Q(x) - P(x)$$

al cărui grad este cel mult egal cu n, avem

$$h(k) = 0 \quad \text{pentru} \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

ceea ce ne arată că, în fapt,

$$h(x) \equiv 0$$

deci polinoamele $P(x)$ și $Q(x)$ coincid.

Făcînd identificarea coeficienților lui x^n rezultă că:

$$\frac{P(0)}{(-1)^n \cdot n!} + \frac{P(1)}{(-1)^{n-1}\, 1!\,(n-1)!} + \frac{P(2)}{(-1)^{n-2}\, 2!(n-2)!} + \\ + \ldots + \frac{P(n)}{n!} = 1$$

sau

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)}{(-1)^{n-k} \cdot k!(n-k)!} = 1.$$

Fie acum δ abaterea de la zero a polinomului $P(x)$ în raport cu mulțimea $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Atunci, vom avea

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{P(x)}{(-1)^{n-k}\, k!(n-k)!} \leqslant \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{P(k)}{(-1)^{n-k}\, k!(n-k)!} \right| \leqslant \\ \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{P(k)}{(-1)^{n-k}\, k!(n-k)!} \right| = \sum_{k=0}^{n} \frac{|P(k)|}{k!(n-k)!}$$

sau

$$1 \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{\delta}{k!(n-k)!} = \delta \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} = \delta \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{n!} = \\ = \frac{\delta}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \frac{\delta}{n!}\, 2^n$$

deci

$$\delta \geqslant \frac{n!}{2^n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar se vede că singurul polinom de gradul n, cu coeficientul dominant 1 care are abaterea de la zero față de mulțimea $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ egală cu $\frac{n!}{2^n}$ este

$$P(x) = \frac{n!}{2^n}\left[\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n!} + \frac{x(x-2)\ldots(x-n)}{1!(n-1)} + \right.$$
$$+ \frac{x(x-1)(x-3)\ldots(x-n)}{2!(n-2)!} + \ldots +$$
$$\left. + \frac{x(x-1)(x-2)\ldots x-(n-1)}{n!}\right]$$

pentru care avem

$$P(n) = P(n-1) = P(n-2) = -P(n-3) = \ldots =$$
$$= (-1)^n \cdot P(0) = \frac{n!}{2^n}.$$

§ 4. PROBLEME

1. Ecuația $x^2 - mx + n = 0$ are rădăcinile x_1, x_2.

1) Să se formeze ecuația cu rădăcinile x_1^3, x_2^3;

2) Să se deducă de aici că dacă a, b, $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \in Z$ atunci $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b} \in Z$ $(a \neq -b)$.

2. Știind că ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ $(a, b, c \in Z, a > 0)$ are două rădăcini distincte în intervalul $(0, 1)$ să se arate că $a \geqslant 5$, iar pentru $a = 5$ există o singură ecuație care verifică condițiile impuse.

3. Fie $f(x) = ax^2 + bx + c$. Dacă f ia valori întregi pentru trei valori întregi consecutive ale lui x, atunci f ia valori întregi pentru orice x întreg.

4. Să se găsească condiția necesară și suficientă pe care trebuie să o verifice trei numere întregi x_1, x_2, x_3 astfel încît pentru orice funcție polinomială de gradul al doilea pentru care $f(x_i) \in Z$ $i = 1, 2, 3$ să avem $f(k) \in Z$ oricare ar fi $k \in Z$.

5. Fie $P(x)$ un polinom de gradul 2 cu coeficienți raționali; să se arate că $P(n)$ este întreg pentru orice n întreg.

Scanned with OKEN Scanner

dacă și numai dacă $P(x) = \frac{1}{2}[ax^2 + (2b - a)x + 2c]$ cu a, b, c întregi.

6. Fie polinomul $f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, cu coeficienți întregi și fie p un număr prim, $p > 3$.

a) Să se arate că dacă p nu divide pe a_0, atunci printre numerele $\frac{f(0)}{p}, \frac{f(1)}{p}, \frac{f(2)}{p}; \ldots; \frac{f(p-1)}{p}$ există cel mult trei numere întregi. b) Să se arate că dacă printre numerele de mai sus există mai mult de trei numere întregi, atunci p divide toți coeficienții polinomului $f(x)$.

7. Să se rezolve ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ știind că are rădăcinile întregi și că $b^2 = c(2a - 3)$.

8. Să se găsească $a, b \in Z$ știind că ecuațiile $x^3 + 2x^2 + ax + b = 0$; $x^3 - x^2 + bx + a = 0$ admit o rădăcină comună întreagă.

9. Fie $x^3 + bx^2 + cx + d$ un polinom cu coeficienți întregi și $bd + cd$ număr impar. Să se arate că acest polinom nu se poate scrie ca un produs a două polinoame cu coeficienți întregi.

10. Dacă un polinom cu coeficienți raționali admite rădăcina $\sqrt[3]{2}$ să se arate că polinomul se divide cu $x^3 - 2$.

11. Să se rezolve ecuația $x^3 - ax^2 + bx - b = 0$, $a, b \in N$ știind că are rădăcinile naturale.

12. Să se arate că dacă a, b, c, d sînt numere întregi, iar ad este impar și bc este par, atunci cel puțin o rădăcină a ecuației $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, este irațională.

13. a) Să se găsească un polinom P cu coeficienți întregi astfel încît $P(n) + 4^n$ să fie divizibil cu 27 pentru orice $n \in N$.

b) Să se arate că un astfel de polinom are gradul cel puțin 2.

14. Fie $a, b, c, d \in Z$, $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) + 1$. Condiția necesară și suficientă ca numărul $P(k)$ să fie pătrat perfect pentru orice k, $k \in Z$ este ca numerele a, b, c, d să fie consecutive.

Scanned with OKEN Scanner

15. Să se rezolve ecuația $x^4 - ax^3 + bdx^2 - cx + d = 0$ știind că rădăcinile sînt numere naturale distincte și a, b, c, $d \in N$.

16. Să se rezolve ecuația

$$x^4 - 2x^3 + x - a = 0, \quad a \in Z.$$

Să se arate că ecuația nu poate avea toate rădăcinile întregi.

17. Pentru care a, $b \in Z$, $P(x) = x^4 + ax^2 + bx + 1$ este reductibil în $Z(n)$?

18. Să se găsească un polinom nenul de grad minim cu coeficienți raționali și care are rădăcina $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

19. Să se arate că dacă un polinom cu coeficienți raționali are ca rădăcină unul din numerele $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, $-\sqrt{3} + \sqrt{2}$, $-\sqrt{3} - \sqrt{2}$ atunci le admite ca rădăcini și pe celelalte trei.

20. Să se arate că dacă m este un număr întreg nedivizibil cu 5 atunci polinomul $P(x) = x^5 - x + m$ este ireductibil în $Z(x)$.

21. Să se descompună în $Z(x)$ polinomul

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{2n+1-2k}.$$

22. Să se descompună în produs de două polinoame cu coeficienți întregi $P(x) = 1 + x + x^{n+3} + x^{n+4} + \ldots + x^{2n+1}$.

23. Să se arate că polinomul $P(x) = (1 + x + \ldots + x^n)^2 - x^n$ este reductibil în $Z[x]$.

24. Să se descompună în factori polinomul:

$$P_{n+1}(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x(x+1)}{2!} + \ldots + \frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{(n+1)!}.$$

25. Să se arate că polinomul $P(x) = (x^n - 2)^n - x - 2$ este reductibil în inelul $Z[x]$.

26. Să se arate că pentru orice numere naturale m și n polinomul $P(x) = m(1 - x^n) - n(1 - x^m)$ este divizibil prin $(1 - x)^2$. Să se determine cîtul.

Scanned with OKEN Scanner

27. Pentru ce valori ale lui m, $x^m - 1$ se divide la $x^{2n} + x^n + 1$?

28. Să se găsească $m, n \in N$ pentru care $P(x) = (x-1)^m + (x+4)^n$ se divide cu $x^2 - x + 5$.

29. Fie $P(x) = (x + a)^n + 1$, $a \in Z$, $n \in N$, n se divide cu 3 dar nu se divide cu 4.

Să se arate că există un polinom Q ireductibil în $Z[x]$, $Q(x) = x^2 + bx + c$; $b, c \in Z$ astfel încît $P(x)$ se divide la $Q(x)$.

30. În ce condiții $P(x)$ se divide la $Q(x)$ dacă

$$P(x) = x^{m+1} + x^m + 1$$

$$Q(x) = x^{n+1} + x^n + 1$$

31. Fie $P(x) = x^{2m} + x^{2n} + 1$, $Q(x) = x^m + x^n + 1$, $m, n \in N$. Dacă $P(x)$ se divide la $Q(x)$ să se arate că $m = 2n$ sau $n = 2m$.

32. Fie $P, Q \in Z[x]$, $P(x) = 3x^{2n} + ax^n + 2$. $Q(x) = 2x^{2m} + ax^m + 3$. Să se arate că $P(x)$ nu se divide la $Q(x)$, $m, n \in N^*$.

33. Fie P, Q, R, S polinoame cu coeficienți întregi astfel ca $P(x) \cdot Q(x) = R(x) \cdot S(x)$ pentru orice x real.

Să se arate că polinomul $A(x) = P^n(x) + Q^n(x) + R^n(x) + S^n(x)$ este reductibil în $Z[x]$ pentru orice n impar.

34. Fie $P \in Z[x]$, $P(x) = x^2 + ax + b$.

Să se arate că pentru orice $n \in N$, $n > 2$, există o pereche unică de întregi a_n, b_n astfel încît polinomul Q, $Q(x) = x^n + a_n x + b_n$, să se dividă prin P.

35. Fie $P(x) = (x - a_1)^2 (x - a_2)^2 \dots (x - a_n)^2 + 1$; $a_i \in Z$, $i = 1, 2, \dots, n$. Să se arate că P este nedecompozabil în $Z[x]$.

36. Să se demonstreze că dacă un polinom $P \in Z[x]$ de gradul n, ia pentru $2n + 1$ valori întregi ale lui x valori întregi prime, atunci este ireductibil în $Z[x]$.

37. Fie $a \in N$ și $P(x) = x^2 - ax - 1$.

Să se arate că nu există nici un polinom cu coeficienți întregi, de modul mai mic decît a astfel încît $Q(x)$ să se dividă la $P(x)$.

Scanned with OKEN Scanner

38. Fie $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots a_n$, $P \in Z[x]$, a_0, a_n impare. Dacă $P(1)$ este impar să se arate că P nu are rădăcini raționale.

39. Fie P un polinom cu coeficienți întregi. Dacă $P(k)$ și $P(h)$ sînt numere impare, numerele k și h fiind întregi, unul par și celălalt impar să se arate că P nu are rădăcini întregi.

40. Fie $P(x) = ax^2 + bx + c$, unde a, b, c sînt numere întregi impare. Să se arate că P nu are rădăcini raționale. *Generalizare.*

41. Fie P un polinom de gradul n cu coeficienți întregi care are cel puțin o rădăcină rațională și cu proprietatea că există două numere întregi $e_1 < e_2$ astfel încît $|P(e_k)| = 1$, $k = 1, 2$;

a) Să se arate că $e_2 - e_1 \leqslant 2$.

b) Demonstrați că $P(x)$ nu admite două rădăcini raționale distincte.

c) Dacă r este rădăcina rațională să se arate că sau r sau $r + 1/2$ este un număr întreg.

42. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ și $a, b \in Q$, $\sqrt{b} \notin Q$, $a_i \in Q$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Dacă f este funcție pară sau impară atunci

$$f(a + \sqrt{b}) = 0 \Rightarrow f(\pm a \pm \sqrt{b}) = 0.$$

43. Găsiți polinoamele de gradul $n \geqslant 2$ cu coeficienți întregi pentru care există $\alpha_k \in Z$, $k = 1, 2, \dots, n$ astfel încît $P(\alpha_k) = k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Arătați că aceste polinoame nu au rădăcini întregi.

44. Fie $P \in Z[x]$, $P = x^n + a_1x^{n-1} + \dots a_n$, $(a_n \neq 0)$. Dacă rădăcinile sale verifică relațiile $|x_i| \leqslant 1$, $i = 1, 2, \dots, n$ să se arate că x_i sînt rădăcini ale unității.

45. Pentru ce numere naturale n există ecuații $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$ cu rădăcinile întregi nenule astfel încît

$$a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}a_n = a_n^2?$$

Scanned with OKEN Scanner

46. Fie P un polinom de grad n pentru care există $a \in Z$ astfel ca: $P(k) \in Z$, $k = a, a+1, \ldots, a+n$. Să se arate că $P(h) \in Z$ pentru orice $h \in Z$.

47. Fie P un polinom de gradul n astfel încît $P(k^2) \in Z$ $k = 0, 1, \ldots, n$. Să se arate că $P(h^2) \in Z$ pentru orice $h \in Z$.

48. Fie P un polinom cu coeficienți întregi. Să se arate că oricare ar fi N există $k \in Z$ astfel ca numărul $P(k)$ să aibă cel puțin un divizor prim mai mare ca N.

49. Fie $P(x) = a_n x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots a_n$, $n \geqslant 2$, $a_0 \neq 0$, $a_k \in Q$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Să se arate că există o infinitate de numere iraționale i pentru care $P(i) \in Q$.

50. Fie $P \in Z[x]$, $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_n$ și p un număr prim, $p > n$. Dacă $P(a)$ se divide la p pentru orice $a \in Z$ să se arate că p divide a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

51. Fie p un număr natural prim și $Q(x) = x^p - x$. Să se arate că $Q(a)$ se divide la p pentru orice $a \in Z$ (Teorema lui *Fermat*).

52. Fie $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $n+2$ numere întregi, p un număr prim, a_n și p fiind prime între ele și n un număr natural oarecare.

Dacă

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n$$

se divide cu p, să se arate că există $m \in Z$ astfel ca

$a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + \ldots + a_{n-1} m^{n-1} + a_n m^n$ să se dividă cu p.

53. Fie $P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ un polinom cu coeficienți întregi. Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 sînt întregi distincți astfel încît $P(x_i) = 2$ pentru $i = 1, 2, 3, 4$, atunci $P(x)$ este diferit de 1, 3, 5, 7, sau 9 pentru orice întreg.

54. Fie $P(x)$ un polinom cu coeficienți întregi care ia valoarea 7 pentru patru întregi distincți. Să se arate că $P(x)$ nu ia valoarea 14 pentru nici un întreg.

55. Fie $P \in Z[x]$ și $P^{(k)}(x)$ polinomul derivat de k ori. Să se arate că $P^{(k)}(m)$ se divide la $k!$ pentru orice $m \in Z$.

56. Fie P un polinom cu coeficienți întregi.

a) Să se arate că dacă $P(0) = P(1) = 1$ atunci $P(x) = x(x-1)P_1(x) + 1$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Fie x_0 un număr întreg arbitrar și $x_{n+1} = P(x_n)$. Să se arate că pentru $n \geqslant 1$ numărul x_n este prim cu x_0, x_1, ..., x_{n-1}.

57. Se consideră polinomul:

$$P(x) = x^{n_k} + x^{n_{k-1}} + \ldots + x^{n_1} + 1$$

unde n_k, n_{k-1}, ..., $n_1 \in N$ și $n_k > n_{k-1} > n_{k-2} > \ldots > n_1$, iar $n_k > 3$.

Să se găsească restul împărțirii acestui polinom prin $x(x-1)^2$.

58. Se consideră identitatea:

$$(x^2 + 3x + 2)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{2n} x^{2n}.$$

1. Să se arate că $a_0 + a_2 + \ldots + a_{2n} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1} = 2^{n-1}3^n$;

2. Să se calculeze a_2.

59. Fie $P(x) = (3x + 5)^n$. Pentru ce valori ale lui n toți coeficienții lui P sînt impari?

60. Să se găsească cel mai mare coeficient al polinomului $P(x) = (3x + 2)^{50}$.

61. Dacă un polinom cu coeficienți întregi admite ca rădăcini pe 1 și 2 să se arate că cel puțin un coeficient este mai mic decît -1.

62. Ecuația

$$n!\,x^n + (n^2 + n + 1)x^{n-1} - (n! + 1)x + (2n)! + 3 = 0$$

$n \geqslant 2$, are rădăcini întregi?

63. Să se arate că o ecuație cu coeficienți întregi al cărei grad este divizibil prin 4 și care are termenul liber un număr impar, iar ceilalți coeficienți sînt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice avînd rația un număr întreg, nu are rădăcini întregi.

64. Să se determine toate polinoamele care au coeficientul dominant egal cu 1, a căror abatere de la zero pe intervalul $[-2, 2]$ are valoarea cea mai mică.

Scanned with OKEN Scanner

65. Se dau n puncte în plan A_1, A_2, ..., A_n. Să se demonstreze că oricare ar fi un segment de lungime dată l, se poate găsi pe acesta un punct M astfel ca produsul

$$\prod_{k=1}^{n} |MA_k| = |MA_1|, |MA_2| \dots |MA_n|$$

să nu fie mai mic decît $2\left(\frac{l}{4}\right)^n$. Cum trebuie să fie dispuse punctele A_1, A_2, ..., A_n pentru ca pe un segment dat PQ, de lungime l, să nu se poată găsi nici un punct M astfel încît produsul

$$|MA_1||MA_2| \dots |MA_n|$$

să fie mai mare decît $2\left(\frac{l}{4}\right)^n$?

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul V

POLINOAME DE MAI MULTE NEDETERMINATE PESTE UN CORP OARECARE

§ 1. DEFINIȚII

Modul cum am definit polinoamele de o nedeterminată peste un corp arbitrar ne permite ca, prin extindere, să definim polinoamele de mai multe nedeterminate peste acesta.

Vom considera o familie finită de mulțimi $X_1, X_2, \ldots, X_n$ astfel că pentru fiecare mulțime X_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ din familie sînt verificate axiomele date în cazul în care familia conține o singură mulțime (vezi Cap. I, § 2). Atunci, dacă $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, ..., $x_n \in X_n$ vom avea și

$$x_1^{p_1} \in X_1, \quad x_2^{p_2} \in X_2, \ \ldots, \ x_n^{p_n} \in X_n \text{ pentru } p_1, p_2, \ldots, p_n \in N.$$

Fie acum elementul $(x_1^{p_1}, x_2^{p_2}, \ldots, x_n^{p_n})$ al produsului cartezian $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ și a un element arbitrar din corpul K.

Vom considera elementul $(a, x_1^{p_1}, x_2^{p_2}, \ldots, x_n^{p_n})$ din produsul cartezian $K \times X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ și îi vom pune în corespondență un nou element pe care îl notăm $ax_1^{p_1} \cdot x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}$ numit *monom* și ale cărui componente sînt:

a = coeficient;

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ = nedeterminate;

p_k = gradul monomului în raport cu nedeterminata x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Suma $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ se numește *gradul* monomului în raport cu toate nedeterminatele.

Două monoame sînt *asemenea* dacă amîndouă conțin aceleași nedeterminate și pentru fiecare din ele gradul este același în cele două monoame (deci cele două monoame diferă numai prin coeficient).

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a defini polinomul vom reaminti că în cazul polinomului de o singură nedeterminată, acesta ne apare, formal, ca o sumă de monoame care nu sînt asemenea.

Prin extindere vom defini un polinom de mai multe nedeterminate $x_1, x_2, \ldots, x_n$, peste un corp K o sumă finită de monoame (pe care le vom numi termenii polinomului) de forma $a_k x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ unde $\alpha_i \in N$, $i = 1, 2, \ldots, n$, iar a_k sînt elemente din K. Mulțimea polinoamelor de nedeterminatele $x_1; x_2; \ldots; x_n$ peste cîmpul K o vom nota $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$.

Vom dezvolta cele ce ne interesează în legătură cu aceste polinoame considerînd $K = \mathbf{R}$ și $X_1 = X_2 = \ldots = X_n = \mathbf{R}$.

Deoarece fiecare termen al unui astfel de polinom poate conține mai multe nedeterminate, fiecare din ele la o anumită putere, vom defini gradul polinomului fie în raport cu o nedeterminată, fie în raport cu mulțimea tuturor nedeterminatelor.

Gradul polinomului în raport cu o nedeterminată va fi dat de gradul maxim al acestei nedeterminate, după cum apare ea în fiecare termen al polinomului.

Pentru a defini *gradul polinomului în raport cu ansamblul tuturor nedeterminatelor*, vom considera mai întîi gradul fiecărui termen în raport cu toate nedeterminatele; gradul polinomului va fi dat de cel mai mare dintre acestea.

De pildă, pentru polinomul

$$P(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 x_2 x_3^3 - 4x_1 x_2^2 x_3 + 7x_1^4 x_2 x_3^2 - 5x_1^3 x_2 x_3$$

gradul în raport cu x_1 este 4, în raport cu x_2 este 2, iar în raport cu x_3 este 3; gradul în raport cu toate nedeterminatele este 7, dat de suma $4 + 1 = 2$ a exponenților nedeterminatelor din termenul al treilea, aceasta fiind mai mare decît sumele analoage din ceilalți termeni.

Un polinom de mai multe nedeterminate se poate scrie ordonat după termenii săi în mai multe moduri și anume:

— în ordinea descrescătoare (sau crescătoare) a exponenților uneia dintre nedeterminate;

— în ordinea descrescătoare (sau crescătoare) a gradelor termenilor săi considerate după toate nedeterminatele.

În exemplul de mai înainte, polinomul se scrie ordonat după puterile descrescătoare ale nedeterminatei x_1 sub forma

$$P(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^4 x_2 x_3^2 + 2x_1^2 x_2 x_3^3 - 5x_1^3 x_2 x_3 - 4x_1 x_2^2 x_3,$$

Scanned with OKEN Scanner

iar în ordinea descrescătoare a gradelor termenilor săi sub forma

$$P(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^4x_2x_3^2 + 2x_1^2x_2x_3^3 - 5x_1^3x_2x_3 - 4x_1x_2^2x_3.$$

Dacă toți termenii unui polinom de mai multe nedeterminate au același grad în raport cu toate nedeterminatele, polinomul se numește *omogen* de gradul respectiv. De pildă, polinomul

$$P(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^5x_2 + 3x_1x_2^2x_3^3 - 6x_2^6 + 9x_1x_3^5 - 4x_1x_2^4x_3$$

este un polinom omogen de gradul 6.

Aceste polinoame se mai numesc și forme algebrice (pe scurt *forme*) motiv pentru care polinoamele de gradul întîi le numim forme liniare, cele de gradul al doilea forme pătratice, cele de gradul al treilea forme cubice, ș.a.m.d.

Se vede ușor că suma a două polinoame omogene de același grad este un polinom omogen de gradul respectiv, iar produsul a două polinoame omogene este un polinom omogen al cărui grad este egal cu suma gradelor celor două polinoame.

§ 2. POLINOAME SIMETRICE

Fie polinomul

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 7x_1x_2x_3x_4$$

în legătură cu care vom face observația că, dacă efectuăm o permutare asupra nedeterminatelor x_1, x_2, x_3, x_4, obținem un polinom identic cu cel dat (ținînd seamă de proprietățile operațiilor dintr-un corp oarecare). Spunem că polinomul este *simetric față de toate nedeterminatele sale* (pe scurt *simetric*).

Așadar, polinomul $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este simetric dacă efectuînd o permutare a nedeterminatelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$, polinomul obținut este identic cu cel dat.

Vom face mențiunea că este posibil ca un polinom $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ să nu fie simetric în raport cu toate nedeterminatele, ci numai în raport cu unele dintre ele (două, trei etc.).

Scanned with OKEN Scanner

De pildă, polinomul

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 5x_1x_2 + x_2^2 + 7x_3$$

este simetric în raport cu nedeterminatele x_1 și x_2, dar nu este simetric în raport cu x_1 și x_3, precum nici în raport cu x_2 și x_3.

Cele mai simple polinoame simetrice de determinatele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt

$$s_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \Sigma x_i$$

$$s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots x_2x_n + \ldots +$$

$$+ x_{n-1}x_n = \sum_{i<j} x_ix_j \qquad (1)$$

$$s_3 = x_1x_2x_3 + \ldots x_{n-2}x_{n-1}x_n = \sum_{i<j<k} x_ix_jx_k$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$s_n = x_1x_2 \ldots x_n$$

care se numesc *polinoame simetrice fundamentale* (sau *elementare*).

Să observăm că dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile unui polinom,

$$Q(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$$

atunci conform relațiilor lui *Viète*, între polinoamele simetrice elementare $s_1, s_2, \ldots, s_n$ și coeficienții polinomului Q există relațiile

$$s_1 = -a_1, \; s_2 = a_2, \; \ldots; \; s_n = (-1)^n a_n \qquad (1)$$

ceea ce ne arată că, dacă un polinom are coeficientul dominant egal cu 1, atunci coeficienții săi sînt polinoame simetrice fundamentale de rădăcinile sale (abstracție făcînd de semn).

Această observație ne permite să abordăm problema calculării sumelor de puteri de forma

$$S_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

care sînt întîlnite în variate aplicații.

Pentru aceasta vom presupune, ca și mai înainte, că $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile polinomului $Q(x)$. Atunci, conform relațiilor (1), el se va scrie sub forma

$$Q(x) = x^n - s_1x^{n-1} + s_2x^{n-2} - \ldots + (-1)^n s_n.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar, pe de altă parte avem

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

precum și

$$\frac{Q'(x)}{Q(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \dots + \frac{1}{x - x_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - x_k}$$

de unde rezultă că

$$Q'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q(x)}{x - x_k}.$$

Făcînd împărțirea lui $Q(x)$ la $x - x_k$ folosind schema lui *Horner*, obținem

	x^n	x^{n-1}	x^{n-2}	...	x^1	x^0
	1	$-s_1$	s_2	...	$(-1)^{n-1} s_{n-1}$	$(-1)^n s_n$
x_k	1	$x_k - s_1$	$x_k^2 - s_1 x_k + s_2$	...	$x_k^{n-1} - s_1 x_k^{n-2} + s_2 x_k^{n-3} \dots + (-1)^{n-1} s_{n-1}$	0

încît vom avea

$$\frac{Q(x)}{x - x_k} = x^{n-1} + (x_k - s_1)x^{n-2} + (x_k^2 - s_1 x_k + s_2)x^{n-3} + \dots + [x_k^{n-1} - s_1 x_k^{n-2} + s_2 x_k^{n-3} - \dots + (-1)^{n-1} s_{n-1}]$$

și prin urmare

$$Q'(x) = \sum_{k=1}^{n} [x^{n-1} + (x_k - s_1)x^{n-2} + (x_k^2 - s_1 x_k + s_2)x^{n-3} + \dots + x_k^{n-1} - s_1 x_k^{n-2} + s_2 x_k^{n-3} - \dots + (-1)^{n-1} s_{n-1}]$$

de unde rezultă că

$$Q'(x) = nx^{n-1} + (S_1 - ns_1)x^{n-2} + (S_2 - s_1 S_1 + ns_2)x^{n-3} + \dots + [S_{n-1} - s_1 S_{n-2} + s_2 S_{n-3} - \dots + (-1)^{n-1} n s_{n-1}].$$

Dar, calculată direct, derivata lui Q este

$$Q'(x) = nx^{n-1} - (n-1)s_1 x^{n-2} + (n-2)s_2 x^{n-3} + \dots + (-1)^{n-1} s_{n-1}$$

încît, identificînd cele două rezultate obținem

$$S_1 - ns_1 = -(n-1)s_1$$

$$S_2 - s_1S_1 + ns_2 = (n-2)s_2$$

$$S_3 - s_1S_2 + s_2S_1 - ns_3 = -(n-3)s_3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$S_{n-1} - s_1S_{n-2} + s_2S_{n-3} - \dots + (-1)^{n-1}ns_{n-1} = (-1)^{n-1}s_{n-1}$$

de unde deducem

$$S_1 = s_1$$

$$S_2 - s_1S_1 = -2s_2$$

$$S_3 - s_1S_2 + s_2S_1 = 3s_3$$

$$S_4 - s_1S_3 + s_2S_2 - s_3S_1 = -4s_4$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Acestea sînt *formulele lui Newton*. Din ele, după efectuarea calculelor, rezultă

$$S_1 = s_1$$

$$S_2 = s_1^2 - 2s_2$$

$$S_3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3$$

$$S_4 = s_1^4 - 4s_1^2s_2 + 4s_1s_3 + 2s_2^2 - 4s_4$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

formule care rezolvă problema pe care ne-am propus-o și anume exprimarea sumelor de puteri,

$$S_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k,$$

pentru $k = 1, 3, \dots, n-1$. Pentru a putea calcula aceste sume și în cazul cînd $k \geqslant n$ considerăm polinomul

$$x^pQ(x) = x^{n+p} - s_1x^{n+p-1} + s_2x^{n+p-2} - \dots + (-1)^ns_nx^p$$

unde $p \in N$.

Este evident că oricare ar fi x_k, $k = 1, 2, \dots, n$, o rădăcină a polinomului Q avem

$$x_k^{n+p} - s_1x_k^{n+p-1} + s_2x_k^{n+p-2} - \dots + (-1)^ns_nx_k^p = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

Scanned with OKEN Scanner

și însumînd de la 1 la n obținem

$$S_{n+p} - s_1 S_{n+p-1} + s_2 S_{n+p-2} - \ldots + (-1)^n s_n S_p = 0.$$

Această formulă rezolvă complet problema pusă în discuție deoarece, dînd succesiv lui p diferite valori $p = 0, 1, 2, \ldots$ obținem

$$S_n - s_1 S_{n-1} + s_2 S_{n-2} - \ldots + (-1)^n n s_n = 0$$
$$S_{n+1} - s_1 S_n + s_2 S_{n-1} - \ldots + (-1)^n s_n S_1 = 0$$
$$S_{n+2} - s_1 S_{n+1} + s_2 S_n - \ldots + (-1)^n s_n S_2 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

de unde, ținînd seamă de rezultatele anterioare referitoare la $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$, exprimăm din prima formulă pe S_n, apoi din a doua pe S_{n+1}, ș.a.m.d.

Să mai observăm că dacă luăm

$$S_p = x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p, \; p \in N;$$
$$S_q = x_1^q + x_2^q + \ldots + x_n^q, \; q \in N;$$

atunci

$$S_p \cdot S_q = (x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p)(x_1^q + x_2^q + \ldots + x_n^q) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^{p+q} + \sum_{i \neq j} x_i^p x_j^q = S_{p+q} + \sum_{i \neq j} x_i^p x_j^q$$

$$\sum_{i \neq j} x_i^p x_j^q = S_p S_q - S_{p+q}; \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Suma din membrul stîng reprezintă un polinom în nedeterminatele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ simetric și omogen de gradul $p + q$. În particular dacă $p = q$, atunci

$$\sum_{i \neq j} x_i^p x_j^p = \frac{1}{2}[(S_p)^2 - S_{2p}], \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Observație. Se poate extinde acest procedeu la cazul în care suma din membrul stîng conține toți termenii de forma

$$x_i^p \cdot x_j^q \cdot x_k, \quad i \neq j, \; j \neq k, \; i \neq k.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se obține

$$\sum_{\substack{i\neq j\\ j\neq k\\ i\neq k}} x_i^p\, x_j^q\, x_k^r = S_p S_q S_r - S_{p+q} S_r - S_{p+r} S_q - S_{q+r} S_p +$$

$$+ 2\, S_{p+q+r}; \quad i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots;\ n;$$

iar în particular dacă $p = q = r$

$$\sum_{\substack{i\neq i\\ j\neq k\\ i\neq k}} x_i^p\, x_j^q\, x_k^p = \frac{1}{6}\,(S_p^3 - 3S_{2p}S_p + 2S_{3p}).$$

§ 3. PROBLEME

1. Să se verifice identitățile:

a) $(x + y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy(x + y)$

b) $(x + y)^5 - x^5 - y^5 = 5xy(x + y)\ (x^2 + xy + y^2)$

c) $(x + y)^7 - x^7 - y^7 = 7xy(x + y)\ (x^2 + xy + y^2)^2$

2. Să se descompună în factori

a) $(x + y + z)^3 - (-x + y + z)^3 - (x - y + z)^3 - (x + y - z)^3$

b) $x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) + 2xyz$

c) $x^2(y + z) + y^2(z + x) - z^2(x + y) + 3xyz$

3. Să se descompună în factori polinoamele

a) $x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$

b) $x^3(y - z) + y^3(z - x) + z^3(x - y)$

4. Să se arate că pentru ca polinomul

$$x^{2n} + px^n y^n + qy^{2n}$$

să fie divizibil prin $x^2 + xy + y^2$ este necesar să avem:

$n = 3k$ și $p + q + 1 = 0$ sau $n \neq 3k$ și $p = q = 1$.

5. Să se stabilească în ce condiții polinomul

$$P(x,\ y) = (x + y)^n - x^n - y^n$$

este divizibil prin $x^2 + xy + y^2$.

Scanned with OKEN Scanner

6. Să se arate că dacă x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile ecuației $x^3 + px + q = 0$ atunci

$$3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1^5 + x_2^5 + x_3^5) = 5(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4).$$

7. Să se arate că dacă $a + b + c = k$, atunci

$$6(a^5 + b^5 + c^5 - k^5) = 5(a^2 + b^2 + c^2 + k^2) \cdot (a^3 + b^3 + c^3 - k^3).$$

8. Dîndu-se ecuația $x^5 - x^2 + 1 = 0$ să se calculeze suma puterilor a 8-a ale rădăcinilor sale.

9. Să se calculeze suma $\sum_{i \neq j} x_i^3 x_j^2$ unde x_i, x_j sînt rădăcini ale ecuației

$$x^3 + 3x - 5 = 0.$$

10. Dacă $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_7$ sînt rădăcinile ecuației $x^7 - 1 = 0$, să se calculeze suma

$$\Sigma (x_1 + x_2)^{20}.$$

11. Să se rezolve sistemul

$$x + y + z = 2$$
$$x^4 + y^4 + z^4 = 8$$
$$x^5 + y^5 + z^5 = 32.$$

12. Să se rezolve sistemul

$$x + y + z = 3$$
$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 78$$
$$x(y + z)^2 + y(z + x)^2 + z(x + y)^2 = -102.$$

13. Dîndu-se ecuația

$$x^3 - 3x^2 - 6x + 11 = 0$$

ale cărei rădăcini se notează cu x_1, x_2, x_3 să se formeze ecuația de gradul trei care are rădăcinile

$$y_1 = x_2 - x_3; \quad y_2 = x_3 - x_1; \quad y_3 = x_1 - x_2.$$

Scanned with OKEN Scanner

14. Dîndu-se ecuația

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$$

cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 se cere să se formeze ecuația de gradul trei care să aibă rădăcinile

$$\frac{x_1}{x_2}, \quad \frac{x_2}{x_3}, \quad \frac{x_3}{x_1}.$$

15. Dîndu-se ecuația $x^3 - 3x + 1 = 0$ care are rădăcinile x_1, x_2, x_3 să se calculeze

$$E = (ax_1 + bx_2 + cx_3)^5 + (bx_1 + cx_2 + ax_3)^5 + \\ + (cx_1 + ax_2 + bx_3)^5$$

unde a, b, c sînt numere reale.

Scanned with OKEN Scanner

SOLUȚII

Capitolul II

1. Deoarece x_1 și x_2 sînt rădăcini ale ecuației $x^2 + ax + b = 0$, iar y_1 și y_2 sînt rădăcini ale ecuației $y^2 + cy + d = 0$ rezultă că

$$x_1 + x_2 = -a;\ x_1x_2 = b;\ y_1 + y_2 = -c;\ y_1y_2 = d.$$

Ecuația pe care vrem s-o construim va avea rădăcinile

$$z_1 = x_1 + y_1;\ z_2 = x_1 + y_2;\ z_3 = x_2 + y_1;\ z_4 = x_2 + y_2$$

și deci va avea sumele *Viète* următoare:

$$S_1 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 2(x_1 + x_2 + y_1 + y_2) = -2(a + c);$$

$$S_2 = (z_1 + z_2)(z_3 + z_4) + z_1z_2 + z_3z_4 = (2x_1 - c)(2x_2 - c) + x_1^2 - cx_1 + d + x_2^2 - cx_2 + d = 4b + 2ac + c^2 + a^2 - 2b + ac + 2d = a^2 + c^2 + 3ac + 2b + 2d;$$

$$S_3 = z_1z_2(z_3 + z_4) + (z_1 + z_2)z_3z_4 = (x_1^2 - cx_1 + d)(2x_2 - c) + (2x_1 - c)(x_2^2 - cx_2 + d) = 2x_1x_2(x_1 + x_2) - 4cx_1x_2 + 2d(x_1 + x_2) - c(x_1^2 + x_2^2) + c^2(x_1 + x_2) - 2cd = -2ab - 4bc - 2ad - c(a^2 - 2b) - ac^2 - 2cd = -2ab - 2bc - 2ad - 2cd - a^2c - ac^2 = -(a + c)(2b + 2d + ac);$$

$$S_4 = z_1z_2z_3z_4 = (x_1^2 - cx_1 + d)(x_2^2 - cx_2 + d) = b^2 - cx_1x_2(x_1 + x_2) + c^2x_1x_2 - cd(x_1 + x_2) + d^2 = b^2 + abc + bc^2 + acd + d^2.$$

Așadar, ecuația căutată va fi

$$z^4 + 2(a + c)z^3 + (a^2 + c^2 + 3ac + 2b + 2d)z^2 + (a + c)(2b + 2d + ac)z + b^2 + abc + bc^2 + acd + d^2.$$

2. Deoarece z_1 și z_2 sînt rădăcinile ecuației $az^2+bz+c=0$ vom avea

$$|z_1 + z_2| = \left|\frac{b}{a}\right| \quad \text{și} \quad |z_1 z_2| = \left|\frac{c}{a}\right|.$$

Prin urmare

$$\frac{|b|^2 + 2|ac|}{|ab|} = \left|\frac{b}{a}\right| + 2\left|\frac{c}{b}\right| = |z_1 + z_2| + \frac{2|z_1 z_2|}{|z_1 + z_2|}.$$

În felul acesta inegalitatea de demonstrat devine

$$|z_k| < \frac{2|z_1 z_2|}{|z_1 + z_2|} + |z_1 + z_2|, \quad k = 1, 2.$$

Dacă $|z_1| = |z_2| = \rho$ atunci scriind inegalitatea începînd din membrul drept avem (ținînd seamă și de faptul că $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$)

$$\frac{2\rho^2}{|z_1 + z_2|} + |z_1 + z_2| > \frac{2\rho^2}{|z_1 + z_2|} \geqslant \frac{2\rho^2}{2\rho} = \rho = |z_k|;$$
$$k = 1, 2.$$

Dacă $|z_1| = \rho_1$, $|z_2| = \rho_2$ și $\rho_1 > \rho_2$ atunci $|z_1 + z_2| \leqslant \rho_1 + \rho_2$ și $|z_1 + z_2| \geqslant \rho_1 - \rho_2$ încît vom avea

$$|z_1 + z_2| + \frac{2|z_1 z_2|}{|z_1 + z_2|} \geqslant \rho_1 - \rho_2 + \frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} =$$
$$= \rho_1 + \frac{\rho_2(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 + \rho_2} > \rho_1.$$

Analog în cazul cînd $\rho_1 < \rho_2$.

Observație. Acest rezultat cunoscut este susceptibil de îmbunătățiri în două sensuri și anume:

1) Vom micșora majorantul, adică vom arăta că $|z| < \frac{|b^2| + |ac|}{|ab|}$ sau $|z_k| \leqslant |z_1 + z_2| + \frac{|z_1 z_2|}{|z_1 + z_2|}$ inegalitate care, dacă notăm

$$|z_k| = \rho_k(\cos\alpha_k + i \sin\alpha_k),$$

devine

$$\rho_k \leqslant \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)} + \\ + \frac{\rho_1\rho_2}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}}.$$

Vom nota $\cos(\alpha_1 - \alpha_2) = y \in [-1, 1]$ și vom studia funcția

$$f : [-1, 1) \to \mathbf{R},\ f(y) = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 y} + \\ + \frac{\rho_1\rho_2}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 y}}.$$

Derivata ei este

$$f'(y) = \frac{\rho_1\rho_2[\rho_1^2 + \rho_2^2 - \rho_1\rho_2 + 2\rho_1\rho_2 y]}{(\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 y)^{3/2}}$$

și se anulează pentru $y_0 = \frac{\rho_1\rho_2 - \rho_1^2 - \rho_2^2}{2\rho_1\rho_2}$. Această soluție este acceptabilă dacă $y_0 \in [-1, 1]$ ceea ce ne conduce la condiția

$$3\rho_1\rho_2 \geqslant \rho_1^2 + \rho_2^2 \text{ adică } \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leqslant \frac{\rho_1}{\rho_2} \leqslant \frac{3 + \sqrt{5}}{2} < 4.$$

În acest caz, $f_{\min} = f(y_0) = 2\sqrt{\rho_1\rho_2} = \sqrt{\rho_1} \cdot \sqrt{4\rho_2} > \rho_1$. (S-a considerat $\rho_1 \geqslant \rho_2$.)
Dacă $\rho_1^2 + \rho_2^2 > 3\rho_1\rho_2$ funcția f este crescătoare și vom avea

$$f_{\min} = f(-1) = \rho_1 - \rho_2 + \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1 - \rho_2} = \rho_1 + \frac{\rho_2^2}{\rho_1 - \rho_2} > \rho_1.$$

2) Vom arăta acum că dacă z_1 și z_2 sînt rădăcinile ecuației date atunci

$$|z_1| + |z_2| \leqslant \frac{|b|^2 + 2|ac|}{|ab|} \text{ adică } |z_1| + |z_2| \leqslant \\ \leqslant |z_1 + z_2| + \frac{|2z_1z_2|}{|z_1 + z_2|}$$

inegalitate care, cu ajutorul notației utilizate la punctul anterior, devine

$$\rho_1 + \rho_2 \leqslant \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 y} + \frac{2\rho_1\rho_2}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 y}}$$

Scanned with OKEN Scanner

și introducînd funcția $g : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ definită prin

$$g(y) = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 y} + \frac{2\rho_1\rho_2}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 y}}$$

avem

$$g'(y) = \frac{\rho_1\rho_2(\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 + 2\rho_1\rho_2 y)}{(\rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2 y)^{3/2}}$$

a cărei solutie este

$y_0 = \frac{2\rho_1\rho_2 - \rho_1^2 - \rho_2^2}{2\rho_1\rho_2}$ care este acceptabilă dacă $\rho_1^2 + \rho_2^2 \leqslant 4\rho_1\rho_2$.

În acest caz $g_{min} = g(y_0) = 2\sqrt{2\rho_1\rho_2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4\rho_1\rho_2} \geqslant \sqrt{2(\rho_1^2 + \rho_2^2)} \geqslant \rho_1 + \rho_2$.

Dacă $\rho_1^2 + \rho_2^2 > 4\rho_1\rho_2$ atunci g este crescătoare și

$$g_{min} = g(-1) = \rho_1 - \rho_2 + \frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1 - \rho_2} = \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{\rho_1 - \rho_2} + \frac{2\rho_2^2}{\rho_1 - \rho_2} =$$

$$= \rho_1 + \rho_2 + \frac{2\rho_2^2}{\rho_1 - \rho_2} > \rho_1 + \rho_2.$$

3. Răspunsul este negativ și se susține printr-un contraexemplu. Mai întîi însă să observăm că

$$P(P(x)) = a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx + c) + c =$$

$$= a^3x^4 + 2a^2bx^3 + (ab^2 + 2a^2c + ab)x^2 + (2abc + b^2)x + ac^2 + bc + c$$

încît, din condiția $P(P(x)) \in R[x]$, pentru orice x, va rezulta că trebuie să avem

$$a^3 \in \mathbf{R};\ a^2b \in \mathbf{R};\ ab^2 + 2a^2c + ab \in \mathbf{R};$$

$$2abc + b^2 \in \mathbf{R};\ ac^2 + bc + c \in \mathbf{R}.$$

Să considerăm numărul complex $a = u + iv$, $u, v \in \mathbf{R}$ și să vedem în ce condiții numărul a^3 este real. Vom avea

$$a^3 = u^3 + 3u^2vi - 3uv^2 - v^3i = u^3 - 3uv^2 + i(3u^2v - v^3)$$

și prin urmare $a^3 \in \mathbf{R}$ dacă și numai dacă $3u^2v - v^3 = 0$, ceea ce presupune $v = 0$ sau $v = \pm u\sqrt{3}$.

Dacă $v = 0$ atunci $a = u \in \mathbf{R}$, iar din condițiile impuse mai sus rezultă imediat că $b \in \mathbf{R}$ și $c \in \mathbf{R}$ și deci $P \in R[x]$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă însă $v = u\sqrt{3}$ (pentru $v = -u\sqrt{3}$ se raționează analog) atunci $a = u(1 + i\sqrt{3})$ și considerînd numărul $b = w + it\,w$, $t \in \mathbf{R}$, din condiția $a^2b \in \mathbf{R}$ rezultă că $w + t\sqrt{3} + i(t - w\sqrt{3}) \in \mathbf{R}$ deci $t - w\sqrt{3} = 0$; $t = w\sqrt{3}$. Prin urmare $b = w(1 + i\sqrt{3})$.

Notînd $\varepsilon = 1 + i\sqrt{3}$ avem $\varepsilon^2 = -2(1 - i\sqrt{3})$ și $\varepsilon^3 = -8$. Atunci $a = u\varepsilon$, $b = w\varepsilon$ și se vede că $ab^2 = uw^2\varepsilon^3 = -8uw^2 \in \mathbf{R}$, încît, din condiția $ab^2 + 2a^2c + ab \in \mathbf{R}$ rezultă că $2a^2c + ab \in \mathbf{R}$ adică $2u^2\varepsilon^2c + uw\varepsilon^2 \in \mathbf{R}$ ceea ce presupune $2u\varepsilon^2c + w\varepsilon^2 \in \mathbf{R}$. Dacă notăm $c = \alpha + \beta i$; $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ultima condiție revine la $(1 - i\sqrt{3})(2\alpha u + 2\beta ui + w) \in \mathbf{R}$, iar de aici rezultă că $2\beta u - 2\alpha u\sqrt{3} - w\sqrt{3} = 0$ adică $\beta = \alpha\sqrt{3} + \frac{w\sqrt{3}}{2u}$. Atunci numărul c este de forma $c = \alpha + \left(\alpha\sqrt{3} + \frac{w\sqrt{3}}{2u}\right) i = \alpha\varepsilon + \frac{wi\sqrt{3}}{2u}$. În felul acesta, penultima din condițiile impuse ca $P(P(x)) \in R[x]$ este îndeplinită deoarece avem $2abc + b^2 = 2uw\varepsilon^2\left(\alpha\varepsilon + \frac{wi\sqrt{3}}{2u}\right) + w^2\varepsilon^2 = 2uw\varepsilon^3\alpha + w^2\varepsilon^2(1 + i\sqrt{3}) = \varepsilon^3(2uw\alpha + w^2) \in \mathbf{R}$ deoarece $\varepsilon^3 = -8$.

În ceea ce privește condiția $ac^2 + bc + c \in \mathbf{R}$ observăm că aceasta se scrie sub forma $c(ac + b + 1) = \left(\alpha\varepsilon + \frac{wi\sqrt{3}}{2u}\right)\left(u\alpha\varepsilon^2 + wi\varepsilon\frac{\sqrt{3}}{2} + w\varepsilon + 1\right) = \frac{1}{4u}[(2u\alpha\varepsilon + wi\sqrt{3})^2\varepsilon + 2(2u\alpha\varepsilon + wi\sqrt{3})(1 + w\varepsilon)] \in \mathbf{R}$, iar de aici, făcînd calculele, rezultă condiția

$$4\alpha u - w^2 + 2w = 0 \quad \text{și deci} \quad \alpha = \frac{w^2 - 2w}{4u}.$$

Atunci $\beta = \frac{w^2\sqrt{3}}{4u}$ și prin urmare $c = \frac{w^2 - 2w}{4u} + \frac{w^2\sqrt{3}}{4u} i = \frac{w}{4u}(w\varepsilon - 2)$.

Am găsit deci numerele complexe $a = u\varepsilon$; $b = w\varepsilon$; $c = \frac{w}{4u}(w\varepsilon - 2)$ cu $\varepsilon = 1 + i\sqrt{3}$; u, w numere reale nenule, pentru care $P(P(x)) \in R[x]$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Fie $a = \rho_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)$; $c = \rho_2(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2)$. Atunci, conform condițiilor problemei, vom avea

$$b = (\rho_1 + \rho_2)\left(\cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + i \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)$$

și prin urmare

$$x_1 + x_2 = -\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1}\left(\cos \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} + i \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)$$

$$x_1 x_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}[\cos(\alpha_2 - \alpha_1) + i \sin(\alpha_2 - \alpha_1)]$$

încît, vom avea

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 =$$

$$= \frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{\rho_1^2}[\cos(\alpha_2 - \alpha_1) + i \sin(\alpha_2 - \alpha_1)].$$

Luînd

$$x_1 - x_2 = -\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}\left(\cos \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} + i \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)$$

obținem imediat $x_1 = -\left(\cos \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} + i \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)$, deci $|x_1| = 1$.

5. Dacă notăm $a = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$; $b = \rho(\cos \beta + i \sin \beta)$; $c = r(\cos \gamma + i \sin \gamma)$ relațiile de condiție devin

$$r\rho[\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)] = r\rho[\cos(\beta - \gamma) + i \sin(\beta - \gamma)] \text{ și } \rho \leqslant 2r.$$

Dacă $\rho = 0$ ecuația devine $x^2 = -\frac{c}{a} = -[\cos(\gamma - \alpha) + i \sin(\gamma - \alpha)]$ și rădăcinile au modulul egal cu unu.

Dacă $\rho \neq 0$ rezultă $\alpha - \beta = \beta - \gamma + 2k\pi$ și deci $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2} - k\pi$. În aceste condiții rădăcinile ecuației vor fi

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{-(\cos \beta + i \sin \beta) \pm (\cos \beta + i \sin \beta)\sqrt{\rho^2 - 4r^2}}{2r(\cos \alpha + i \sin \alpha)} =$$

$$= [\cos(\beta - \alpha) + i \sin(\beta - \alpha)]\left(\frac{-\rho \pm i\sqrt{\rho^2 - 4r^2}}{2r}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $\rho \leqslant 2r$ numerele $\frac{-\rho \pm i\sqrt{\rho^2 - 4r^2}}{2r}$ sînt complexe și au modulul $\sqrt{\frac{\rho^2 + 4r^2 - \rho^2}{4r^2}} = 1$ și cum $|\cos(\beta - \alpha) + i \sin(\beta - \alpha)| = 1$ rezultă $|x_k| = 1$, $k = 1, 2$.

6. a) Împărțind respectiv cu a, a_1 și aa_1 cele trei ecuații devin

$$x^2 + mx + n = 0;\ x^2 + m_1 x + n_1 = 0;\ 2x^2 + mm_1 x + 2nn_1 = 0 \text{ cu } m = \frac{b}{a};\ n = \frac{c}{a};\ m_1 = \frac{b_1}{a_1};\ n_1 = \frac{c_1}{a_1}.$$

Dacă primele două ecuații au rădăcinile de modul r și respectiv ρ atunci

$$m = -r(\cos\alpha + i\sin\alpha + \cos\beta + i\sin\beta) =$$

$$= -2r\cos\frac{\alpha - \beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha + \beta}{2} + i\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$m_1 = -2\rho\cos\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}\left(\cos\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} + i\sin\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}\right);$$

$$n = r^2[\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)];$$

$$n_1 = \rho^2[\cos(\alpha_1 + \beta_1) + i\sin(\alpha_1 + \beta_1).$$

Ecuația a treia devine

$$2x^2 + 4r\rho\cos\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}(\cos\theta + i\sin\theta)x +$$

$$+ 2r^2\rho^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = 0$$

unde $\theta = \frac{\alpha + \alpha_1 + \beta + \beta_1}{2}$ și are rădăcinile

$$x_{1,2} = r\rho(\cos\theta + i\sin\theta)\left(-\cos\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} \pm\right.$$

$$\left. \pm i\sqrt{1 - \cos^2\frac{\alpha - \beta}{2}\cos^2\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}}\right)$$

de unde se vede că $|x_k| = r\rho$, $k = 1, 2$.

b) Implicația $P_1 \wedge P_2 \to P_3$ este falsă. Vom căuta un contraexemplu considerînd toți coeficienții reali, rădăcinile ecuației a doua reale și distincte, iar rădăcinile ecuațiilor

Scanned with OKEN Scanner

prima și a treia complexe conjugate. Vom lua $a = a_1 = 1$; $b = 1$; $b_1 = -3$; $c = 1$; $c_1 = 2$ iar ecuațiile devin

$$x^2 + x + 1 = 0;\ x^2 - 3x + 2 = 0;\ 2x^2 - 3x + 4 = 0.$$

Rădăcinile primei ecuații au modulele egale cu unu, rădăcinile ecuației a treia au modulele egale cu 2, însă rădăcinile ecuației a doua sînt 1 și 2 adică au module diferite.

7. Răspunsul este negativ. Considerăm $n = 2$ și $P(x) = x^2 + ix + 1$. Generalitatea nu se micșorează dacă se consideră polinoame cu coeficientul dominant egal cu unu. Presupunem că există polinomul $P_1(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ cu $\alpha = a + bi$; $\beta = c + di$; $a^2 + b^2 = 1$; $c^2 + d^2 = 1$ astfel încît polinomul $P(x)P_1(x) = x^4 + x^3(\alpha + i) + x^2(1 + \alpha i + \beta) + x(\alpha + \beta i) + \beta$ să aibă coeficienții de modul egal cu unu, adică

$$(1)\quad |\alpha + i| = 1; \qquad (2)\quad |1 + \alpha i + \beta| = 1;$$

$$(3)\qquad |\alpha + \beta i| = 1.$$

Relația (1) se mai scrie $|a + i(1 + b)| = 1$ adică $a^2 + (1 + b)^2 = 1$ și deci $b = -\frac{1}{2}$, $a = \varepsilon\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(\varepsilon = \pm 1)$.

Relația (3) se scrie $|a - d + i(b + c)| = 1$ adică $(a - d)^2 + (b + c)^2 = 1$ și deci $bc - ad = -\frac{1}{2}$ de unde, conform rezultatelor anterioare, avem $c + \varepsilon\sqrt{3}\,.\ d = 1$. (4)

Pe de altă parte, relația (2) devine $|1 - b + c + i(a + d)| = 1$ adică

$$(1 - b + c)^2 + (a + d)^2 = 1 \text{ sau } \left(\frac{3}{2} + c\right)^2 + \left(\varepsilon\frac{\sqrt{3}}{2} + d\right)^2 = 1$$

și prin urmare

$$3c + \varepsilon\sqrt{3}\,d = -3 \text{ deci } c\sqrt{3} + \varepsilon d = -\sqrt{3}. \quad (5)$$

Ridicînd la pătrat relațiile (4) și (5) se obține după adunare

$$4(c^2 + d^2) + 4\varepsilon\sqrt{3}\,cd = 4 \text{ și deci } cd = 0.$$

Dacă $c = 0$ se obține din (4) $d = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{3}}$ și din (5) $d = -\frac{\sqrt{3}}{\varepsilon}$. Contradicție.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $d = 0$ din (4) se obține $c = 1$ iar din (5) $c = -1$, deci o nouă contradicție. Așadar nu există P_1 cu proprietățile enunțate.

8. Răspunsul este afirmativ. Polinomul $P(x) = x^n + ix^{n-1}$ verifică condiția cerută. Într-adevăr, presupunînd că $P(x) = \alpha + \beta i$ pentru două valori reale diferite ale lui x rezultă că ecuațiile $x^n = \alpha$ și $x^{n-1} = \beta$ au două rădăcini reale comune. Dar, dintre cele două ecuații binome, una este de grad impar, iar aceasta are o rădăcină reală și numai una.

9. Dacă $a + b + c = 0$ vom arăta că:

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ac); \quad a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$a^4 + b^4 + c^4 = 2(ab + bc + ac)^2; \quad a^5 + b^5 + c^5 =$$

$$= -5abc(ab + bc + ac); \quad a^7 + b^7 + c^7 = 7abc(ab + bc + ac)^2.$$

Considerînd a, b, c rădăcini ale ecuației $x^3 + px + q = 0$ unde $p = ab + bc + ac$ și $q = -abc$, atunci

$$(1) \quad a^3 + pa + q = 0; \quad b^3 + pb + q = 0; \quad c^3 + pc + q = 0$$

și însumînd aceste egalități obținem $a^3 + b^3 + c^3 + p(a + b + c) + 3q = 0$ adică $a^3 + b^3 + c^3 = -3q$.

Ținînd seama că $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = -2p$ și înmulțind egalitățile (1) cu a^2, b^2, c^2 respectiv obținem

$$a^5 + b^5 + c^5 + p(a^3 + b^3 + c^3) + q(a^2 + b^2 + c^2) = 0;$$

$$a^5 + b^5 + c^5 = 5pq.$$

Dacă înmulțim egalitățile (1) respectiv cu a, b, c și le adunăm avem

$$a^4 + b^4 + c^4 + p(a^2 + b^2 + c^2) + q(a + b + c) = 0$$

deci

$$a^4 + b^4 + c^4 = 2p^2.$$

De asemenea, înmulțind egalitățile (1) respectiv cu a^4, b^4, c^4 și adunînd rezultatele obținem

$$a^7 + b^7 + c^7 + p(a^5 + b^5 + c^5) + q(a^4 + b^4 + c^4) = 0$$

de unde

$$a^7 + b^7 + c^7 = -7p^2q.$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci, se vede că vom avea

$$A_2 = \{x \in \mathcal{C} \mid P(x)Q(x) + Q(x)R(x) + P(x)R(x) = 0\}$$

$$A_3 = \{x \in \mathcal{C} \mid P(x)Q(x)R(x) = 0\}$$

$$A_4 = \{x \in \mathcal{C} \mid [P(x)Q(x) + Q(x)R(x) + P(x)R(x)]^2 = 0\}$$

$$A_5 = \{x \in \mathcal{C} \mid P(x)Q(x)R(x)\ [P(x)Q(x) + Q(x)R(x) + P(x)R(x)] = 0\}$$

$$A_7 = \{x \in \mathcal{C} \mid P(x)Q(x)R(x)\ [P(x)Q(x) + Q(x)R(x) + P(x)R(x)]^2 = 0\}$$

și afirmațiile din enunț sînt justificate.

10. a) Fie $x_k = (\cos \alpha_k + i \sin \alpha_k)$ $k = 1, 2, 3$. Deoarece $x_1x_2x_3 = 1$ rezultă $|x_1| \cdot |x_2| \cdot |x_3| = 1$, deci $\rho^3 = 1$ și prin urmare $\rho = 1$. De asemenea, rezultă că $\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 1$ și deci $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2m\pi$. Atunci putem scrie că

$$Im(x_1x_2 + x_3) = \sin(\alpha_1 + \alpha_2) + \sin \alpha_3 =$$
$$= \sin(2m\pi - \alpha_3) + \sin \alpha_3 = 0.$$

Deci $P_1 \Rightarrow P_2$.

Pe de altă parte din egalitățile

$$a = -(x_1 + x_2 + x_3) =$$
$$= -[\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3 + i(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \sin \alpha_3)]$$

$$b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 =$$
$$= \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3 - i(\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \sin \alpha_3)$$

se vede că $Im(a) = Im(b)$, deci $P_1 \Rightarrow P_3$.

b) Implicația $P_2 \wedge P_3 \Rightarrow P_1$ nu este adevărată, iar pentru a dovedi aceasta vom construi un contraexemplu. Fie $x_k = \rho_k(\cos \alpha_k + i \sin \alpha_k)$, $k = 1, 2, 3$. Atunci $\rho_1\rho_2\rho_3 = 1$ și $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2m\pi$ și prin urmare vom avea

$$Im(x_1x_2 + x_3) = \rho_1\rho_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) + \rho_3 \sin \alpha_3 =$$
$$= \frac{1}{\rho_3} \sin(2m\pi - \alpha_3) + \rho_3 \sin \alpha_3 = (\rho_3^2 - 1)\frac{1}{\rho_3} \sin \alpha_3.$$

Vom considera $\rho_3 = 1$ și deci P_2 este adevărată. Să mai observăm că

$$Im(a) = Im(b) = -(\rho_1 \sin \alpha_1 + \rho_2 \sin \alpha_2 + \rho_3 \sin \alpha_3) +$$
$$+ \left(\frac{1}{\rho_1} \sin \alpha_1 + \frac{1}{\rho_2} \sin \alpha_2 + \frac{1}{\rho_3} \sin \alpha_3\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{\rho_1} - \rho_1\right) \sin \alpha_1 + \left(\frac{1}{\rho_2} - \rho_2\right) \sin \alpha_2.$$

Presupunem $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ și vom avea $Im(a) - Im(b) =$

$$= \frac{(\rho_1 + \rho_2)(1 - \rho_1\rho_2)}{\rho_1\rho_2} \sin \alpha.$$

Dar $\rho_3 = 1$ și $\rho_1\rho_2\rho_3 = 1$, încît $\rho_1\rho_2 = 1$ și prin urmare $Im(a) = Im(b)$, adică P_3 este adevărată.

Deci, luînd $\rho_3 = 1$ și $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ propoziția $P_2 \wedge P_3$ este adevărată. Știm că $\rho_1\rho_2 = 1$ și $\alpha_3 = 2m\pi - 2\alpha$; dacă vom lua $m = 0$ vom avea $\alpha_3 = -2\alpha$, iar pentru $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = \frac{1}{2}$ și $\alpha = \frac{\pi}{4}$ obținem

$$x_1 = \sqrt{2}(1 + i); \quad x_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + i); \quad x_3 = -i \text{ deci}$$
$$a, b \in \mathcal{C} \setminus \mathbf{R}.$$

Cum în mod evident rădăcinile x_1, x_2, x_3 nu au același modul, rezultă tocmai ceea ce voiam să arătăm.

11. a) Deoarece $-a = x_1 + x_2 + x_3$ și $b = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$ avem (ținînd seamă că $x_1x_2x_3 = -1$)

$$|b| = \left|x_1x_2x_3\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right)\right| = |\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3| =$$
$$= \overline{|x_1 + x_2 + x_3|} = |-a| = |a|.$$

b) Avem $b - a = \overline{(x_1 + x_2 + x_3)} + (x_1 + x_2 + x_3) \in \mathbf{R}$ și $P(1) = a + b + 2 \in \mathbf{R}$ deci $a + b \in \mathbf{R}$ încît rezultă și

$$a = \frac{(a + b) + (a - b)}{2} \in \mathbf{R}, \qquad b = \frac{(a + b) - (a - b)}{2} \in \mathbf{R}.$$

12. Modulele rădăcinilor fiind egale și produsul lor fiind

$$x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^{2n} = 1$$

rezultă că toate rădăcinile au modulul egal cu unu.

Scanned with OKEN Scanner

Atunci $P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ și $P(-1) = (-1)^n (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n)$ încît vom avea

$$\overline{P(-1)} = (-1)^n \overline{(1 + x_1)}\ \overline{(1 + x_2)} \dots \overline{(1 + x_n)} =$$

$$= (-1)^n (1 + \bar{x}_1)(1 + \bar{x}_2) \dots (1 + \bar{x}_n)$$ și cum $\bar{x}_k = \frac{1}{x_k}$, $k = 1, 2, \dots, n$ rezultă că

$$\overline{P(-1)} = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(1 + \frac{1}{x_2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{x_n}\right) =$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{(x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots (x_n + 1)}{x_1 x_2 \dots x_n}$$

deci $\overline{P(-1)} = P(-1)$ deoarece $x_1 x_2 \dots x_n = 1$. Numărul $P(-1)$ fiind egal cu conjugatul său va fi un număr real.

13. Rădăcinile polinomului Q se obțin din ecuația $x^{n+1} = 1$ eliminînd rădăcina $x = 1$. Așadar rădăcinile lui Q sînt $x_k = \cos \frac{2k\pi}{n+1} + i \sin \frac{2k\pi}{n+1}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Dar din enunț rezultă că $P(x_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ și cum $x_k^{n+1} = 1$ avem $P_1(1) + x_k P_2(1) + \dots + x_k^{n-1} P_n(1) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. Aceste relații reprezintă un sistem liniar omogen în $P_k(1)$, $k = 1, 2, \dots, n$ care are determinantul de tip *Vandermonde*, iar acesta este nenul deoarece $x_i \neq x_j$ dacă $i \neq j$. Ca atare, sistemul va admite numai soluția banală $P_k(1) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ și deci polinoamele P_k, $k = 1, 2, \dots, n$ se divid cu $x - 1$.

14. Fie P un polinom de gradul n ($n \geqslant m$). Avem identitatea

$$(1) \quad P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m)Q(x) + R(x)$$

în care polinomul R are gradul $k \leqslant m - 1$.

Dacă resturile împărțirii lui $P(x)$ la $x - a_1$; $x - a_2$; ... ..., $x - a_m$ sînt egale cu a atunci

$$P(a_1) = R(a_1) = a;\ P(a_2) = R(a_2) = a;\ \dots;\ P(a_m) = R(a_m) = a$$

ceea ce ne arată că polinomul $R(x) - a$ are rădăcinile $a_1, a_2, \dots, a_m$ și cum numărul acestora întrece gradul său rezultă că el este constant.

Scanned with OKEN Scanner

Reciproc, dacă presupunem că $R(x) = C$ atunci identitatea (1) devine

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m) Q(x) + C \text{ și deci}$$

$$P(a_1) = P(a_2) = \dots = P(a_m) = C$$

adică resturile împărțirii lui $P(x)$ la $x - a_1$, $x - a_2$, ..., ..., $x - a_m$ sînt egale.

15. (a) Punînd $a = m + ni$ $m, n \in \mathbf{R}$ și considerînd rația progresiei $p + qi$, $p, q \in \mathbf{R}$, vom avea $b = m + p + i(n + q)$; $c = m + 2p + i(n + 2q)$; $d = m + 3p + i(n + 3q)$ și ecuația devine:

$$(1) \quad mx^3 + (m + p)x^2 + (m + 2p)x + m + 3p + i[nx^3 + (n + q)x^2 + (n + 2q)x + n + 3q] = 0.$$

Rădăcinile reale ale acestei ecuații sînt rădăcinile reale comune ale ecuațiilor

$$(2) \quad mx^3 + (m + p)x^2 + (m + 2p)x + m + 3p = 0;$$

$$(3) \quad nx^3 + (n + q)x^2 + (n + 2q)x + n + 3q = 0.$$

Cum $a \neq 0$ vom avea $m \neq 0$ sau $n \neq 0$.

Presupunem că $m \neq 0$ și vom arăta că ecuația (2) are o singură rădăcină reală și deci ecuația (1) are cel mult o rădăcină reală. Punînd $\frac{p}{m} = r$ ecuația (2) se scrie $x^3 + x^2 + x + 1 + r(x^2 + 2x + 3) = 0$ sau

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 3} + r = 0 \text{ deoarece } x^2 + 2x + 3 \neq 0$$

oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

Funcția f are derivata $f'(x) = \frac{x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 4x + 1}{(x^2 + 2x + 3)^2} =$

$$= \frac{(x + 1)^4 + 4x^2}{(x^2 + 2x + 3)^2} > 0.$$

Cum derivata f' nu are rădăcini reale și $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ rezultă că ecuația $f(x) = 0$ și implicit ecuația (2)) are o rădăcină reală și numai una.

Dacă $m = 0$ atunci $n \neq 0$ și se arată că ecuația (3) are o rădăcină reală și numai una.

(b) Dacă ecuația dată are o rădăcină reală, rezultă că ecuațiile (2) și (3) au o rădăcină reală comună. Fie aceasta rădăcina t. Vom avea deci

$$mt^3 + (m + p)t^2 + (m + 2p)t + m + 3p = 0;$$

$$nt^3 + (n + q)t^2 + (n + 2q)t + n + 3q = 0.$$

Înmulțind aceste relații cu n și respectiv $-m$ obținem după adunare

$(pn - qm)(t^2 + 2t + 3) = 0$ și cum t este număr real rezultă că $t^2 + 2t + 3 \neq 0$, deci $pn = qm$, adică $n = km$, $q = kp$ sau $m = 0$, $p = 0$ sau $n = 0$, $q = 0$. În primul caz ecuația dată devine $(1 + ki)[mx^3 + (m + p)x^2 + (m + 2p)x + m + 3p] = 0$ care verifică condiția cerută. Dacă însă $m = 0$, $p = 0$ sau $n = 0$, $q = 0$ ecuația devine

$i[nx^3 + (n + q)x^2 + (n + 2q)x + (n + 3q)] = 0$ sau respectiv $mx^3 + (m + p)x^2 + (m + 2p)x + m + 3p = 0$ care, de asemenea, verifică și ele condiția cerută.

16. Dacă $a - 3r$, $a - r$, $a + r$, $a + 3r$ sînt rădăcinile polinomului P atunci

$$P(x) = b(x - a + 3r)(x - a + r)(x - a - r)(x - a - 3r) =$$

$$= b[(x - a)^4 - 10r^2(x - a)^2 + 9r^4] \text{ și deci } P'(x) =$$

$$= b[4(x - a)^3 - 20r^2(x - a)] = 4b(x - a)[(x - a)^2 - 5r^2],$$

iar rădăcinile polinomului P' sînt $a - r\sqrt{5}$, a, $a + r\sqrt{5}$ care formează o progresie aritmetică de rație $r\sqrt{5}$.

17. Pentru $x = -1$ rezultă $P(2) = 1$; de asemenea, avem $P(0) = 1$. Demonstrăm prin inducție completă că $P(3n + 2) = 1$, $n \in N$. Presupunem $P(3(n - 1) + 2) = 1$ și facem în relația de condiție $x = 3(n - 1) + 2$. Avem

$$3nP(3(n - 1) + 2) - (3n - 1)P(3n + 2) = 1 \text{ și deci}$$

$$P(3n + 1) = \frac{3n - 1}{3n - 1} = 1.$$

Așadar $P(x) = 1$ pentru $x = 3n + 2$, $n \in N$, deci $P(x) - 1$ are o infinitate de rădăcini și deci este identic nul. Atunci $P(x) = 1$, $x \in \mathbf{R}$.

18. Relația dată se mai scrie $(m + k)P(m) - m = 0$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n$. Fie $Q(x) = (x + k)P(x) - x$, care este

un polinom de gradul $n+1$ și are rădăcinile $0, 1, 2, \ldots, n$. Prin urmare $Q(x) = ax(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$ și deci

$$P(x) = \frac{ax(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{x+k}.$$

Este necesar ca polinomul $ax(x-1)(x-2)\ldots(x-n)+x$ să se dividă cu $x+k$ adică $a(-k)(-k-1)(-k-2)\ldots(-k-n)-k=0$ și deci

$$a = \frac{k}{(-1)^{n+1}k(k+1)(k+2)\ldots(k+n)} = \frac{(-1)^{n+1}}{(k+1)(k+2)\ldots(k+n)}$$

și vom avea

$$P(x) = \frac{x}{x+k}\left[\frac{(-1)^{n+1}(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{(k+1)(k+2)\ldots(k+n)} + 1\right] \text{ încît}$$

$$P(n+1+k) =$$

$$= \frac{n+1+k}{n+1+2k}\left[\frac{(-1)^{n+1}(n+k)(n+k-1)\ldots(k+1)}{(k+1)(k+2)\ldots(k+n)}\right] + 1 =$$

$$= \frac{n+1+k}{n+1+2k}[(-1)^{n+1}+1] = 0$$

și deci $x_0 = n+1+k$ este o rădăcină a lui P.

19. Fie $P(x) = a(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_k)^{\alpha_k}$, $k \geqslant 2$, ($\alpha_j \neq \alpha_i$ dacă $j \neq i$). Din relația dată în enunț rezultă că P și P' au aceleași rădăcini (diferă ordinul de multiplicitate).

Dar $P'(x) = a(x-x_1)^{\alpha_1-1}(x-x_2)^{\alpha_2-1}\ldots(x-x_k)^{\alpha_k-1}Q(x)$

unde

$$Q(x) = \alpha_1(x-x_2)\ldots(x-x_k) + \alpha_2(x-x_1)(x-x_3)\ldots$$
$$\ldots(x-x_k) + \ldots + \alpha_k(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{k-1}).$$

Cum $Q(x_j) \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$, rezultă că P' are și rădăcini diferite de x_j, $j = 1, 2, \ldots, k$. Atunci $k = 1$ și deci $P(x) = a(x-x_1)^{\alpha_1}$; $P'(x) = a\alpha_1(x-x_1)^{\alpha_1-1}$. Din condiția $[P(x)]^{n-1} = [P'(x)]^n$ rezultă că $a^{n-1} = a^n\alpha_1^n$ și $(n-1)\alpha_1 = n(\alpha_1-1)$ adică $\alpha_1 = n$ și $a = \frac{1}{n^n}$. Așadar, $P(x) = \left(\frac{x-x_1}{n}\right)^n$.

20. Fie $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ un astfel de polinom și ρ modulul rădăcinilor și al coeficienților.

Din $x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$ deducem că $\rho^n = \frac{\rho}{\rho} = 1$ deci $\rho = 1$. Deci polinoamele respective trebuie căutate printre cele cu coeficienții și rădăcinile de modul egal cu unu. Este suficient să considerăm polinomul $P(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1$ pentru a răspunde afirmativ întrebării. Într-adevăr, rădăcinile acestui polinom au modulul egal cu 1 deoarece ele se găsesc printre rădăcinile ecuației $x^{n+1} = 1$.

21. Fie $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ și $a_k = r_k (\cos \alpha_k + i \sin \alpha_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Din ipoteză rezultă că $|P(\cos \alpha + i \sin \alpha)| = 1$ oricare ar fi $\alpha \in \mathbf{R}$ adică

$$\left| \sum_{k=0}^{n} r_k [\cos (k\alpha + \alpha_k) + i \sin (k\alpha + \alpha_k)] \right| = 1 \text{ și deci}$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n} r_k \cos (k\alpha + \alpha_k) \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{n} r_k \sin (k\alpha + \alpha_k) \right)^2 = 1, \ \alpha \in \mathbf{R}$$

sau

$$\sum_{k=0}^{n} r_k^2 + 2 \sum_{0 \leqslant h < k \leqslant n} r_k r_h \cos [\alpha(k-h) + \alpha_k - \alpha_h] = 1, \ \alpha \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Evident $r_n \neq 0$ și presupunînd $r_0 \neq 0$ relația (1) se aduce la forma

$$b_n \cos (n\alpha + \beta_n) + b_{n-1} \cos [(n-1)\alpha + \beta_{n-1}] + \ldots + b_1 \cos (\alpha + \beta_1) + b_0 = 0 \quad (2)$$

unde $\alpha \in \mathbf{R}$ și $b_n = 2 r_0 r_n \neq 0$.

Derivînd de două ori relația (2) obținem

$$n^2 b_n \cos (n\alpha + \beta_n) + (n-1)^2 \cos [(n-1)\alpha + \beta_{n-1}] + \ldots + b_1 \cos (\alpha + \beta_1) = 0, \quad (3)$$

iar dacă derivăm relația (3) de $2(n-1)$ ori și considerăm relațiile care conțin numai funcții cosinus obținem un sistem omogen cu necunoscutele $b_k = \cos (k\alpha + \beta_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, și cu determinantul *Vandermonde* nenul; el are deci numai soluții banale.

Pentru $k = n$, $b_n = \cos(n\alpha + \beta_n)$ nu este identic nul ($\alpha \in \mathbf{R}$) și deci se ajunge la o contradicție. Rezultă că $r_0 = 0$ și deci $a_0 = 0$. În acest caz $P(x) = xQ(x)$ și condiția $|P(x)| = 1$ pentru $|x| = 1$ devine $|Q(x)| = 1$ pentru $|x| = 1$. Se ajunge în acest mod la $P(x) = x^{n-1}(a_n x + a_{n-1})$ cu condiția $|a_n x + a_{n-1}| = 1$ dacă $|x| = 1$ și deci

$$[r_n \cos(\alpha + \alpha_n) + r_{n-1} \cos \alpha_{n-1}]^2 + [r_n \sin(\alpha + \alpha_n) +$$
$$+ r_{n-1} \sin \alpha_{n-1}]^2 = 1 \text{ adică}$$

$r_n^2 + r_{n-1}^2 + 2r_n r_{n-1} \cos(\alpha + \alpha_n - \alpha_{n-1}) = 1$, $\alpha \in \mathbf{R}$ și deci $r_{n-1} = 0$ adică $a_{n-1} = 0$. Prin urmare $P(x) = ax^n$ unde

$$a \in \mathcal{C},\ |a| = 1.$$

22. Fie $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ $a_0 \neq 0$. Este necesar să avem $a_0 x^n(a^n - 1) + a_1 x^{n-1}(a^{n-1} - 1) + \ldots + a_{n-1} x(a - 1) =$ pentru orice $x \in X$.

Aceasta implică $a^n - 1 = 0$; $a_1(a^{n-1} - 1) = 0$; $\ldots$; $a_{n-2}(a^2 - 1) = 0$; $a_{n-1}(a - 1) = 0$ deci a este o rădăcină complexă de ordinul n a unității.

Un exemplu de astfel de polinom este $P(x) = a_0 x^n + a_n$, $n \geqslant 3$. Pentru $a = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ avem $P(x) = P(ax)$ oricare ar fi $x \in X$.

Putem obține și polinoame mai generale, de exemplu $P(x) = b_0 + b_1 x^m + b_2 x^{2m} + \ldots + b_k x^{km}$, $m \geqslant 3$. Pentru $a = \cos \frac{2\pi}{m} + i \sin \frac{2\pi}{m}$ avem $P(x) = P(ax)$.

23. Fie $R(x) = P(x) + P(\omega x) + P(\omega^2 x)$ (1). Înlocuind în această expresie x cu ωx rezultă $R(\omega x) = P(\omega x) + P(\omega^2 x) + P(x)$, iar dacă înlocuim x cu $\omega^2 x$ rezultă $R(\omega^2 x) = P(\omega^2 x) + P(x) + P(\omega x)$.

Așadar, $R(x) = R(\omega x) = R(\omega^2 x)$. Dacă x_1 este o rădăcină a lui R atunci $R(x_1) = 0$ și deci $R(\omega x_1) = 0$, $R(\omega^2 x_1) = 0$ ceeace înseamnă că R se divide cu $(x - x_1)(x - \omega x_1)(x - \omega^2 x_1) = x^3 - x_1^3$. Rezultă de aici că R conține numai termeni de grad divizibil prin 3, adică există Q astfel ca $R(x) = Q(x^3)$.

Altă soluție. Dacă $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ atunci

$$R(x) = 3a_0 + a_1 x(1 + \omega + \omega^2) + a_2(1 + \omega^2 + \omega^4) +$$
$$+ \ldots + a_n(1 + \omega^n + \omega^{2n})$$

Cum

$$1 + \omega^k + \omega^{2k} = \begin{cases} 0 \text{ pentru } k \neq 3M \\ 3 \text{ pentru } k = 3M \end{cases}$$ rezultă afirmația din enunț.

24. Vom face demonstrația prin inducție completă după k. Pentru $k = 0$ avem $P(x) = Q(x)$ și deci P are cel puțin un coeficient nenul.

Presupunem că, pentru orice polinom neidentic nul Q_1, polinomul $P_1(x) = (x - 1)^k Q_1(x)$ are cel puțin $k + 1$ coeficienți nenuli. Fie

$$P(x) = (x - 1)^{k+1} Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_h x^{n-h},$$

$$a_h \neq 0,\ h \leqslant n, \text{ și deci}$$

$$P(x) = x^{n-h}(a_0 x^h + a_1 x^{h-1} + \ldots + a_h) = x^{n-h}(x - 1)^{k+1} Q_1(x).$$

Dacă notăm $R(x) = (x - 1)^{k+1} Q_1(x)$, se vede că P și R au același număr de coeficienți nenuli. Deoarece

$$R'(x) = (k + 1)(x - 1)^k (a_0 x^h + a_1 x^{h-1} + \ldots + a_h) +$$

$$+ (x - 1)^{k+1} [a_0 h x^{h-1} + a_1 (h - 1) x^{h-2} + \ldots + a_{h-1}] =$$

$$= (x - 1)^k R_1(x)$$

atunci din ipoteza de inducție, rezultă că R' are cel puțin $k + 1$ coeficienți nenuli.

Cum $R(x) = a_0 x^h + a_1 x^{h-1} + \ldots + a_{h-1} x + a_h$ rezultă că $R'(x) = h a_0 x^{h-1} + (h - 1) a_1 x^{h-2} + \ldots + a_{k-1}$ și deci coeficienții nenuli ai lui R' aparțin mulțimii $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$. Dar cum $a_h \neq 0$ rezultă că R are cel puțin $k + 2$ coeficienți nenuli.

25. Fie $P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$ și punînd $x = ak$, $k \in [-1, 1]$ avem

$$\frac{P(x)}{P\left(\frac{x}{a}\right)} = \left|\frac{ak - x_1}{k - x_1}\right| \cdot \left|\frac{ak - x_2}{k - x_2}\right| \ldots \left|\frac{ak - x_n}{k - x_n}\right|.$$

Pentru $k = 0$ rezultă $\dfrac{P(x)}{P\left(\frac{x}{a}\right)} = 1$ și cum $b < a + b - 1$ inegalitatea se verifică

Pentru $k = 0$ avem $\left|\frac{ak - x_i}{k - x_i}\right| = \left|\frac{a - \frac{x_i}{k}}{1 - \frac{x_i}{k}}\right|$, iar dacă notăm $\frac{x_i}{k} = z$ se vede că $|z| > a + b$ și deci

$$\left|\frac{ak - x_i}{k - x_i}\right| = \left|\frac{a - z}{1 - z}\right| = \left|1 + \frac{a - 1}{1 - z}\right| \geqslant 1 - \left|\frac{a - 1}{1 - z}\right| =$$

$$= 1 - \frac{a - 1}{|1 - z|}.$$

Dar

$$|1 - z| \geqslant |z| - 1 > a + b - 1 \text{ și deci } -\frac{1}{|1 - z|} \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{1}{a + b - 1}$$

și prin urmare

$$\left|\frac{ak - x_i}{k - x_i}\right| \geqslant 1 - \frac{a - 1}{a + b - 1} = \frac{b}{a + b - 1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Așadar

$$\frac{|P(x)|}{\left|P\left(\frac{x}{a}\right)\right|} > \left(\frac{b}{a + b - 1}\right)^n.$$

26. a) Dacă polinomul este constant, propoziția este evidentă. Dacă, însă, polinomul este neconstant, inegalitatea se mai scrie $P^2(x_0) \leqslant P^2(x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Problema se reduce la a arăta că funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ $f(x) = P^2(x)$ are un punct de minim absolut. Derivata sa este un polinom de grad impar care are cel puțin o rădăcină reală cu ordin de multiplicitate impar, deci f admite puncte de extrem relativ. Fie $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ abscisele acestor puncte. Cum $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ rezultă că x_1 este abscisa unui punct de minim. Fie $x_1, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_h}$ abscisele punctelor de minim și $m = \min [f(x_1), f(x_{i_1}), \ldots, f(x_{i_h})]$. Notăm x_0 unul din numerele pentru care $f(x) = m$ și avem $f(x_0) \leqslant f(x)$ adică $P^2(x_0) \leqslant P^2(x)$.

b) Polinomul se scrie $P(x) = Q(x) + iR(x)$ $Q, R \in R[x]$. Vom considera funcția $g(x) = |P(x)|^2 = Q^2(x) + R^2(x)$ $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$. Raționînd la fel ca în cazul precedent rezultă existența punctului $x_0 \to \mathbf{R}$ pentru care avem $g(x_0) \leqslant g(x)$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$ și deci propoziția este adevărată.

c) Propoziția este falsă. Considerăm polinomul $P(x) = x^2 - 2$ și presupunem prin absurd că există $x_0 \in Q$ astfel încît $|P(x_0)| \leqslant |P(x)|$ oricare ar fi $x \in Q$. Cum rădăcinile ecuației $P(x) = 0$ sînt $\pm \sqrt{2}$ (iraționale) rezultă că $P(x_0) = 0$. Fie $x_n \to \sqrt{2}$, $x_n \in Q$. Rezultă $|P(x_0)| \leqslant |P(x_n)|$ $n \in N$ și prin trecere la limită se obține contradicția $|P(x_0)| \leqslant 0$.

27. a) Punem $P(z) = k$, $k \in \mathbf{R}$, k arbitrar. Orice soluție a acestor ecuații face ca $P(z)$ să fie real.

b) Răspunsul este negativ. Fie $P(x) = i(x^2 + 1)$. Pentru orice $a \in \mathbf{R}$ și $a^2 + 1 \neq 0$ avem $P(a) \in \mathbb{C} \setminus \mathbf{R}$.

Se poate arăta că pentru acele polinoame pentru care nu toți coeficienții sînt reali și există $a \in \mathbf{R}$ astfel încît $P(a) \in \mathbf{R}$, numărul numerelor a este finit. Într-adevăr, $P(x)$ se scrie $P(x) = Q(x) + iR(x)$ unde $Q, R \in R[x]$ și $R(x) \not\equiv 0$. Numerele a pentru care $P(a) \in \mathbf{R}$ verifică relația $R(a) = 0$ vor fi deci rădăcini ale lui R. Cum R nu este identic nul, numărul rădăcinilor sale este finit și deci numărul numerelor a este finit.

28. Din $P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$ deducem

$$P(\omega^k x) = (\omega^k x - x_1)(\omega^k x - x_2) \ldots (\omega^k x - x_n) =$$

$$= \omega^{kn}\left(x - x_1\frac{1}{\omega^k}\right)\left(x - x_2\frac{1}{\omega^k}\right)\ldots\left(x - x_n\frac{1}{\omega^k}\right)$$

și notînd $\frac{1}{\omega} = \omega_1$ avem

$$P(\omega x) = \omega^{kn}(x - x_1\omega_1^k)(x - x_2\omega_1^k) \ldots (x - x_n\omega_1^k)$$

și prin urmare

$$\prod_{k=0}^{p-1} P(\omega^k x) = \omega^{\frac{np(p-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)(x - x_i\omega_1)(x - x_i\omega_1^2)\ldots$$

$$\ldots (x - x_i\omega_1^{p-1}).$$

Dar $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{p-1}$ sînt rădăcinile ecuației $x^p - 1 = 0$; la fel $1, \omega_1, \omega_1^2, \ldots, \omega_1^{p-1}$ sînt rădăcinile ecuației $x^p - 1 = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă că x_i, $x_i\omega_1$, $x_i\omega_1^2$, ..., $x_i\omega_1^{p-1}$ sînt rădăcinile ecuației $x^p - x_i^p = 0$. Așadar $(x - x_i)(x - x_i\omega_1) \ldots (x - x_i\omega_1^{p-1}) = x^p - x_i^p$ și prin urmare

$$\prod_{k=0}^{p-1} P(\omega^k x) = \omega^{\frac{np(p-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} (x^p - x_i^p).$$ Rezultă că

$$\prod_{k=0}^{p-1} P(\omega^k x) = \omega^{\frac{np(p-1)}{2}} \prod_{i=0}^{n} (x^p - x_i^p).$$ Dar, conform ipotezei, avem $\{x_1^p, x_2^p, \ldots, x_n^p\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ și deci vom putea scrie

$$\prod_{k=0}^{p-1} P(\omega^k x) = \omega^{\frac{np(p-1)}{2}} (x^p - x_1)(x^p - x_2) \ldots (x^p - x_n) =$$

$$= \omega^{\frac{np(p-1)}{2}} P(x^p).$$

Dar

$$\omega^{\frac{np(p-1)}{2}} = \left(\cos\frac{2\pi}{p} + i\sin\frac{2\pi}{p}\right)^{\frac{np(p-1)}{2}} = \cos n(p-1)\pi +$$

$$+ i\sin n(p-1)\pi = (-1)^{n(p-1)}$$ și deci $P(x^p) =$

$$= \prod_{k=0}^{p-1} P(\omega^k x) \frac{1}{(-1)^{n(p-1)}} = (-1)^{n(p-1)} \prod_{k=0}^{p-1} P(\omega^k x).$$

29. Polinomul P se scrie $P(x) = Q(x) + i\,R(x)$, $Q, R \in R[x]$. Fie $a \in \mathbf{R}$ pentru care $P(a) = Q(a) + iR(a)$ și deci $R(a) = 0$. Cum polinomul R are ca rădăcină orice număr real rezultă $R \equiv 0$ și deci $P \in R[x]$.

Presupunem că P are gradul mai mare sau egal cu 2. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_k$ rădăcinile reale și distincte ale polinomului derivat și notăm $m = \min(P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_k))$. Ecuația $P(x) - k = 0$ $(k < m)$ are cel mult o rădăcină reală (rezultă din șirul lui *Rolle*). Așadar există $a \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ astfel încît $P(a) - k = 0$ și deci $P(a) = k \in \mathbf{R}$ ceea ce contrazice ipoteza. În cazul în care polinomul derivat nu are rădăcini reale, raționamentul nu se schimbă (luăm, de pildă, $k = 0$). Rezultă deci că gradul polinomului este inferior lui 2. Dacă polinomul este constant, evident, condiția din enunț nu se verifică. Dacă gradul este unu, polinoamele din $P(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ au proprietatea din enunț.

Scanned with OKEN Scanner

30. Notăm $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$; $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{n-k}$; $R(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^{n-k}$ și avem $P(x) = Q(x) + iR(x)$. Fie r o rădăcină a lui P; avem deci $P(r) = 0$ adică $Q(r) + iR(r) = 0$. Cum $Q(r)$ și $R(r)$ sînt reale avem $Q(r) = R(r) = 0$ și deci r este rădăcină reală comună a ecuațiilor acestea. Reciproc, dacă pentru $r \in \mathbf{R}$ și $Q(r) = 0$; $R(r) = 0$ atunci $P(r) + iQ(r) = 0$. În plus, se poate arăta că ordinul de multiplicitate este același împărțind ecuațiile succesiv cu $x - r$, $(x - r)^2$, ..., $(x - r)^k$ unde k este ordinul de multiplicitate.

31. Ecuația se scrie $x^3 - 4x^2 - x + a + i(x^2 - x) = 0$ și pentru ca ea să aibă o rădăcină reală este necesar și suficient ca ecuațiile $x^3 - 4x^2 - x + a = 0$; $x^2 - x = 0$ să aibă o rădăcină comună. Cum a doua ecuație are rădăcinile 0 și 1, iar $x = 0$ nu este rădăcină a primei ecuații dacă a este nenul, rămîne ca rădăcină comună $x = 1$ pentru care rezultă $a = 4$.

32. Fie $a = b + ic$, $b, c \in \mathbf{R}$. Ecuația se va scrie $bx^3 + x^2 - bx + 1 + i(cx^3 - cx) = 0$ și pentru ca ea să aibă rădăcini reale este necesar și suficient ca ecuațiile $bx^2 + x^2 - bx + 1 = 0$ și $cx^3 - cx = 0$ să aibă cel puțin o rădăcină reală comună. Rădăcinile ecuației $c(x^3 - x) = 0$ sînt $-1, 0, 1$, însă nici una dintre ele nu verifică ecuația $bx^3 + x^2 - bx + 1 = 0$. Deci ecuația dată nu are rădăcini reale.

33. Dacă $|\omega| = 1$ atunci $\omega = \frac{1}{\bar{\omega}}$. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile ecuației. Ele satisfac $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ și deci $\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} = 0$, de unde $\overline{\sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}} = \bar{0}$ sau $\sum_{k=0}^{n} \bar{a}(\bar{x})^{n-k} = 0$. De aici rezultă $\sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k \left(\frac{1}{\bar{x}}\right)^k = 0$ sau $\sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k x^k = 0$. Aceasta ne arată că, ecuația la care am ajuns, are același rădăcini cu ecuația inițială. Rezultă că $a_0 = \alpha\bar{a}_n$, $a_1 = \alpha\bar{a}_{n-1}$, ..., $a_n = \alpha\bar{a}_0$ unde $\alpha \in \mathcal{C}$. Atunci, deducem că $a_0 = \alpha(\overline{\alpha\bar{a}_0})$ sau $a_0 = \alpha(\bar{\alpha}\bar{\bar{a}}_0) = \alpha\bar{\alpha}a_0 = |\alpha|^2 a_0$ și prin

Scanned with OKEN Scanner

urmare (deoarece $a_0 \neq 0$) avem $|\alpha| = 1$. Aceasta înseamnă că $|a_0| = |a_n|$ și $a_0 a_n = k\bar{a}_0 a_0 = k|a_0|^2$. Analog obținem $a_i a_{n-i} = k|a_i|^2$ și deci $|a_i| = |a_{n-i}|$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Atunci, se vede că vom avea $\arg a_i + \arg a_{n-i} = \arg k$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Condiția nu este suficientă așa cum rezultă din contraexemplul $n = 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_2 = 1$. Avem $|a_0| = |a_2|$, $|a_1| = |a_1|$, $\arg a_0 + \arg a_2 = 0$, însă rădăcinile sînt $\pm\sqrt{3}$ care, evident, nu au modulul 1.

34. Din formula lui *Taylor* avem

$$P(x+i) = P(i) + \frac{x}{1!}P'(i) + \ldots + \frac{x^n}{n!}P^{(n)}(i)$$

și deci este necesar și suficient să avem $P(i) \in \mathbf{R}$, $P'(i) \in \mathbf{R}, \ldots, P^{(n)}(i) \in \mathbf{R}$.

Pentru $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ avem $P'(x) = a_1 + 2a_2x$, $P''(x) = 2a_2$ deci $a_2 \in \mathbf{R}$, $a_1 + 2a_2i \in \mathbf{R}$, $a_0 + a_1i - a_2 \in \mathbf{R}$. De aici avem $a_1 = a - 2a_2i$ cu $a \in \mathbf{R}$ și deci $a_0 + ai + 2a_2 - a_2 \in \mathbf{R}$ adică $a_0 = b - ai$ unde $b \in \mathbf{R}$. Atunci

$$P(x) = b - ai + (a - 2a_2i)x + a_2x^2 \text{ cu } a, b, a_2 \in \mathbf{R}$$

sau

$$P(x) = b + ax + a_2x^2 - i(a + 2a_2x)$$

și notînd $b + ax + a_2x^2 = Q(x) \in R[x]$ rezultă $P(x) = Q(x) - iQ'(x)$.

35. Numerele $r, r^2, \ldots, r^n$ sînt rădăcinile de ordinul n ale unității și deci verifică ecuația $x^n - 1 = 0$; atunci $\sum_{k=1}^{n} r^k = 0$. De asemenea, $r^h, r^{2h}, \ldots, r^{nh}$ reprezintă, pentru fiecare $h = 1, 2, \ldots, n-1$, rădăcinile de ordinul n ale unității, deci $\sum_{k=1}^{n} r^{kh} = 0$ pentru fiecare $h = 1, 2, \ldots, n-1$. Atunci

$$\sum_{k=1}^{n} P(r^k) = \sum_{k=1}^{n} (a_0r^{nk} + a_1r^{(n-1)k} + \ldots + a_{n-1}r^k + a_n) =$$

$$= a_0\sum_{k=1}^{n} r^{nk} + a_1\sum_{k=1}^{n} r^{(n-1)k} + \ldots + a_{n-1}\sum_{k=1}^{n} r^k + na_n.$$

Dar $r^n = 1$ și deci $r^{nk} = 1$. Atunci

$$\sum_{k=1}^{n} P(r^k) = a_0n + a_nn = n(a_0 + a_n).$$

Scanned with OKEN Scanner

36. Notăm $M_n = \min\limits_{P \in S_n} (\max\limits_{|x|=1} |P(x)|)$. Fie $P(x) = x^n + 1$, $P \in S_n$. Deoarece $|P(x)| \leqslant |x|^n + 1 = 2$ pentru $|x| = 1$, $\max\limits_{|x|=1} |P(x)| = |P(1)| = 2$ și deci $M_n \leqslant 2$.

Presupunem că $M_n < 2$ și fie P polinomul pentru care se realizează acest minim. Din $\max\limits_{|x|=1} |P(x)| < 2$ deducem $|Re(P(x))| < 2$, $|x| = 1$ și deci $-2 < Re(P(x)) < 2$. Punînd acum $r = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$ avem $r^k = 1$ pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n$ și $-2 < Re(P(x^k)) < 2$, deci $-2n < Re\sum\limits_{k=1}^{n} P(r^k) < 2n$ ceea ce constitue o contradicție deoarece $\sum\limits_{k=1}^{n} P(r^k) = 2n$.

(Vezi problema 35).

37. a) Fie x_i o rădăcină a lui P. Din $P(x_i) = 0$ și $|P(x_i)| = |Q(x_i)|$ rezultă $Q(x_i) = 0$ și deci x_i este rădăcină și pentru Q. La fel se arată că orice rădăcină a lui Q este rădăcină și pentru P. Așadar, P și Q au aceleași rădăcini, deci

$$P(x) = b(x - x_1)^{i_1}(x - x_2)^{i_2} \ldots (x - x_n)^{i_n};$$

$$Q(x) = c(x - x_1)^{h_1}(x - x_2)^{h_2} \ldots (x - x_n)^{h_n}.$$

Urmează să arătăm că $i_k = h_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Presupunem că $i_1 > h_1$. Împărțind prin $|x - x_1|^{h_1}$, relația $|P(x)| = |Q(x)|$ devine $|x - x_1|^{i_1 - h_1} |P_1(x)| = |Q_1(x)|$ pentru $x \neq x_1$ unde

$$P_1(x) = b(x - x_2)^{i_2}(x - x_3)^{i_3} \ldots (x - x_n)^{i_n};$$

$$Q_1(x) = c(x - x_2)^{i_2}(x - x_3)^{i_3} \ldots (x - x_n)^{i_n}.$$

Pentru $x \neq x_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, avem

$$|x - x_1|^{i_1 - h_1} = \left|\frac{Q_1(x)}{P_1(x)}\right| = b\,|x - x_2|^{h_2 - i_2} \cdot |x - x_3|^{h_3 - i_3} \ldots$$

$$\ldots |x - x_n|^{h_n - i_n} \qquad (1)$$

Scanned with OKEN Scanner

Punem $x = x_1 + \frac{1}{m}$ și avem $x - x_1 = \frac{1}{m}$, iar din $|x - x_2| = \left|x_1 - x_2 + \frac{1}{m}\right|$ deducem

$$|x_1 - x_2| - \frac{1}{m} \leqslant \left|x_1 - x_2 + \frac{1}{m}\right| \leqslant |x_1 - x_2| + \frac{1}{m} \ (m > 0).$$

Așadar, pentru $m \to \infty$, $\left|x_1 - x_2 + \frac{1}{m}\right| \to |x_1 - x_2|$ și trecînd la limită în (1) avem

$$0 = |x_1 - x_2|^{h_2 - i_2} \cdot |x_1 - x_3|^{h_3 - i_3} \ldots |x_1 - x_n|^{h_n - i_n},$$

ceea ce este absurd. Deci $i_k = h_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ și prin urmare $P(x) = aQ(x)$, $|a| = 1$.

b) Răspunsul este negativ. Vom căuta două polinoame P, Q cu rădăcini diferite astfel încît $|P(x)| = |Q(x)|$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$. Fie

$$P(x) = a(x) + ib(x),\ Q(x) = c(x) + id(x),\ a, b, c, d \in R[x].$$

Condiția $|P(x)| = |Q(x)|$ pentru $x \in \mathbf{R}$, devine

$$a^2(x) + b^2(x) = c^2(x) + d^2(x).$$

Punem $a(x) = 3x - 4$, $b(x) = 4x + 3$, $c(x) = \frac{5}{\sqrt{2}}(x + 1)$; $d(x) = \frac{5}{\sqrt{2}}(x - 1)$ și avem $P(x) = x(3 + 4i) - 4 + 3i$; $Q(x) = \frac{5}{\sqrt{2}}[x(1 + i) + 1 - i]$. Rădăcinile lor fiind $-i$ și respectiv i nu există a astfel încît $P(x) = aQ(x)$.

38. a) Fie x_1 o rădăcină a lui P. Din $0 = |P(x_1)| \geqslant |Q(x)_1|$ rezultă $Q(x_1) = 0$ și deci x_1 este rădăcină și pentru Q. Fie

$$P(x) = a(x - x_1)^{i_1}(x - x_2)^{i_2} \ldots (x - x_n)^{i_n} \text{ și}$$

$$Q(x) = (x - x_1)^{h_1}(x - x_2)^{h_2} \ldots (x - x_n)^{h_n} R(x),$$

unde R este prim cu P.

Presupunem că $i_1 > h_1$. Împărțind inegalitatea $|P(x)| \geqslant |Q(x)|$ cu $|x - x_1|^{h_1}$ avem $|a| \cdot |x - x_1|^{i_1 - h_1} \geqslant |x - x_2|^{h_2 - i_2} \cdot |x - x_3|^{h_3 - i_3} \ldots |x - x_n|^{h_n - i_n} \cdot |R(x)|$ pentru $x \in \mathcal{C} - \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Scanned with OKEN Scanner

Punem $x = x_1 + \frac{1}{m}$ și avem $|x - x_2| = \left|x_1 - x_2 + \frac{1}{m}\right|$.

Dar $|x_1 - x_2| - \frac{1}{m} \leqslant \left|x_1 - x_2 + \frac{1}{m}\right| \leqslant |x_1 - x_2| + \frac{1}{m}$ $(m > 0)$ și deci

$$|x - x_2| \to |x_1 - x_2| \text{ dacă } m \to \infty.$$

Descompunînd în factori pe R se arată că $|R(x)| \to |R(x_1)|$ dacă $m \to \infty$. În felul acesta inegalitatea de mai înainte se va scrie

$$|a| \left(\frac{1}{m}\right)^{i_1 - h_1} \geqslant \left|x_1 - x_2 + \frac{1}{m}\right|^{h_2 - i_2} \ldots \left|x_1 - x_n + \frac{1}{m}\right|^{h_n - i_n} \cdot \left|R\left(x_1 + \frac{1}{m}\right)\right|$$

și trecînd la limită pentru $m \to \infty$ se obține

$0 \geqslant |x_1 - x_2|^{h_2 - i_2} \ldots |x_1 - x_n|^{h_n - i_n} |R(x_1)|$, ceea ce este absurd.

Deci $i_1 \leqslant h_1$ și în general $i_k < h_k$ pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n$. Rezultă de aici că grad $Q \geqslant$ grad P. Vom arăta că este imposibilă inegalitatea grad $Q >$ grad P și deci va rămîne grad $Q =$ grad P, adică $i_k = h_k$ pentru orice $k = 1, 2, \ldots, n$ și grad $R = 0$; deci $P(x) = \lambda Q(x)$ cu $|\lambda| < 1$.

Să presupunem că grad $Q >$ grad P. Vom avea

$$|a| > |\lambda| \cdot |x - x_1|^{l_1} |x - x_2|^{l_2} \ldots$$

$$\ldots |x - x_n|^{l_n} |x - x_1'|^{m_1} |x - x_2'|^{m_2} \ldots |(x - x_p')|^{m_p}$$

unde $l_k = h_k - i_k \geqslant 0$ și $R(x) = b(x - x_1')^{m_1} (x - x_2')^{m_2} \ldots$

$$\ldots (x - x_p')^{m_p} \text{ și}$$

$$l_1 + l_2 + \ldots + l_n + m_1 + m_2 + \ldots + m_p > 0.$$

Avem $|x - x_i| \geqslant |x| - |x_i|$ și fie $M = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|, |x_1'|, |x_2'|, \ldots, |x_p'|)$. Pentru $x > M + 1 + \frac{|a|}{|b|}$ rezultă $|a| > |b| \left(1 + \frac{|a|}{|b|}\right)$ adică $|b| < 0$; absurd.

Scanned with OKEN Scanner

b) Răspunsul este negativ. Fie $P(x) = x^2 + 1 + ix$; $Q(x) = x$. Pentru $x \in \mathbf{R}$ avem $P(x) = \sqrt{(x^2+1)^2 + x^2}$, $Q(x) = |x|$ și evident $|P(x)| > |Q(x)|$ fără a avea relația $P(x) = \lambda Q(x)$.

39. Din condiția a) rezultă $f(x) = a_0(x - x_1)^{i_1}(x - x_2)^{i_2} \ldots (x - x_k)^{i_k}$ și $g(x) = b_0(x - x_1)^{j_1}(x - x_2)^{j_2} \ldots (x - x_k)^{j_k}$. Dacă polinoamele f și g au gradele m și respectiv n, atunci $i_1 + i_2 + \ldots + i_k = m$ și $j_1 + j_2 + \ldots + j_k = n$. Din condiția b) rezultă $f(x) - 1 = a_0(x - x_1')^{\alpha_1}(x - x_2')^{\alpha_2} \ldots (x - x_k)^{\alpha_h}$ și

$$g(x) - 1 = b_0(x - x_1')^{\beta_1}(x - x_2')^{\beta_2} \ldots (x - x_h')^{\beta_h} \quad \text{unde}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_h = m \quad \text{și} \quad \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_h = n.$$

Avem evident $f(x) = a_0(x - x_1)^{i_1}(x - x_2)^{i_2} \ldots (x - x_k)^{i_k} = 1 + a_0(x - x_1')^{\alpha_1}(x - x_2')^{\alpha_2} \ldots (x - x_h)^{\alpha_h}$ și deci $x_l \neq x_s'$.

Polinomul derivat $f'(x)$ admite pe $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_1', x_2', \ldots, x_h'$ ca rădăcini cu ordinele de multiplicitate $i_1 - 1, i_2 - 1, \ldots, i_k - 1, \alpha_1 - 1, \ldots, \alpha_h - 1$ și cum gradul lui f' este $m - 1$ avem:

$$m - 1 \geqslant (i_1 - 1) + (i_2 - 1) + \ldots + (i_k - 1) + (\alpha_1 - 1) + \ldots + (\alpha_h - 1) \text{ adică}$$

$$m - 1 \geqslant i_1 + i_2 + \ldots + i_k - k + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_h - h$$

sau $m - 1 \geqslant m - k + m - h$ adică $k + h \geqslant m + 1$. Analog se arată că $h + k \geqslant n + 1$ și deci $k + h \geqslant \max(m+1, n+1)$. Se observă ușor că polinomul $P(x) = f(x) - g(x)$ admite ca rădăcini pe $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_1', x_2', \ldots x_h'$ având gradul cel mult $\max(m, n)$. Cum $k + h \geqslant \max(m + 1, n + 1)$ rezultă că P este identic nul și deci $f \equiv g$.

40. Avem $\Sigma x_1x_2 \ldots x_k = (-1)^k a_k$ și deci $|a_k| = |\Sigma x_1x_2 \ldots x_k| \leqslant \Sigma |x_1x_2 \ldots x_k|$ adică $|a_k| \leqslant \Sigma 1$. Cum suma considerată conține C_n^k termeni vom avea $|a_k| \leqslant C_n^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ și deci $\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} C_n^k = 2^n - 1$ adică

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| < 2^n.$$

Scanned with OKEN Scanner

41. Fie u un număr complex astfel ca $|u| > \frac{|a_0|}{a}$; rezultă $|u| > 1$. Avem $|P(u)| = |a_0u^n + a_1u^{n-1} + \ldots + a_{n-1}u + a_n| \geqslant ||a_0u^n| - |a_1u^{n-1} + \ldots + a_{n-1}u + a_n||$. Dar $|a_1u^{n-1} + a_2u^{n-2} + \ldots + a_{n-1}u + a_n| \leqslant |a_1||u|^{n-1} + |a_2||u|^{n-2} + \ldots + |a_{n-1}||u| + a_n < |u|^n(|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|) \leqslant |u|^n|a_0| = |a_0u^n|$.

Cum $|a_0u^n| - |a_1u^{n-1} + \ldots + a_{n-1}u + a^n| > 0$ rezultă că

$$||a_0u^n| - |a_1u^{n-1} + \ldots + a_{n-1}u + a_n|| > 0 \text{ și deci}$$

$|P(u)| > 0$ adică u nu este rădăcină a polinomului P. Așadar afirmația din enunț este justificată.

42. Pentru rădăcinile de modul cel mult 1 proprietatea este evidentă. Fie u o rădăcină astfel ca $|u| > 1$. Vom avea

$$u^n = -(a_1u^{n-1} + a_2u^{n-2} + \ldots + a_{n-1}u + a_n) \text{ deci } |u|^n \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k||u|^{n-k} \text{ și cum } |a_k| < 1 \text{ rezultă } |u|^n \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |u|^{n-k} \text{ adică } |u^n| \leqslant \frac{|u|^n - 1}{|u| - 1} \text{ sau } \frac{|u|^n(|u| - 2) + 1}{|u| - 1} \leqslant 0.$$

Cum $|u| - 1 > 0$ rezultă $|u|^n(|u| - 2) + 1 \leqslant 0$ și deci

$$|u| - 2 \leqslant \frac{-1}{u} < 0 \text{ adică } |u| < 2.$$

Observație. Prin același procedeu se demonstrează un rezultat mai general și anume: dacă u este o rădăcină a polinomului $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ atunci $|u| < 1 + \max \left|\frac{a_k}{a_0}\right|$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

43. Avem $|P(x)| \geqslant |a_0||x^n| - |a_1x^{n-1} + |a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n|$ precum și

$$|a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n| \leqslant |a_1||x|^{n-1} +$$

$$+ |a_2||x|^{n-2} + \ldots + |a_{n-1}||x| + |a_n|$$

iar din inegalitatea *Cauchy-Buneakovski*

$$|a_1||x|^{n-1}+|a_2||x|^{n-2}+\ldots+|a_{n-1}||x|+|a_n|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{(|a_1|^2+|a_2|^2+\ldots+|a_n|^2)(|x|^{2n-2}+\ldots+|x|^2+1)}=$$

$$=\sqrt{(1-|a_0|^2)(|x|^{2n-2}+\ldots+|x|^2+1)}.$$

De aici rezultă că $|P(x)|\geqslant|a_0||x|^n-$

$$-\sqrt{(1-|a_0|^2)(|x|^{2n-2}+\ldots+|x|^2+1)}$$

Punînd $|x|^2=r$ și $|a_0|^2=a<1$ avem

$$|P(x)|\geqslant\frac{ar^n-(1-a)(r^{n-1}+r^{n-2}+\ldots+r+1)}{\sqrt{ar^n}+\sqrt{(1-a)(r^{n-1}+r^{n-2}+\ldots+r+1)}}.$$

Pentru $r>\frac{1}{a}$ avem $\frac{1}{r}<a$ și deci $\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}+\ldots+\frac{1}{r^n}<a+a^2+\ldots+a^n+\ldots=\frac{a}{1-a}$ adică $ar^n-(1-a)(r^{n-1}+r^{n-2}+\ldots+r+1)>0$ și deci $|P(x)|>0$ pentru $r>\frac{1}{a}$ adică pentru $|x|>\frac{1}{|a_0|}$; rezultă $|x_k|\leqslant\frac{1}{|a_0|}$, $k=1,2,\ldots,n$.

Polinomul $Q(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ are ca rădăcini pe $\frac{1}{x_k}$, $k=1,2,\ldots,n$, iar din cele arătate mai sus rezultă $\frac{1}{|x_k|}\leqslant\frac{1}{|a_n|}$ și prin urmare $|x_k|\geqslant|x_n|$ oricare ar fi $k=1,2,\ldots,n$.

Observație. Dacă se renunță la condiția $\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2=1$ se obțin inegalitățile

$$\frac{|a_n|}{\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2}\leqslant|x_i|\leqslant\frac{\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2}{|a_0|}.$$

44. Fie $M = |a_1| + \sqrt{|a_2|} + \ldots + \sqrt[n]{|a_n|}$. Pentru $|x| > M$ avem (vezi soluția problemei precedente) $P(x) \geqslant$ $\geqslant |x|^n \left(1 - \frac{|a_1|}{M} - \frac{|a_2|}{M^2} - \ldots - \frac{|a_n|}{M^n}\right)$ și deci $P(x) >$ $> \left(\frac{x}{M}\right)^n (M^n - |a_1| M^{n-1} - |a_2| M^{n-2} - \ldots - |a_n|)$.

Dar $M^n = M^{n-1}(|a_1| + \sqrt{|a_2|} + \ldots + \sqrt[n]{|a_n|}) =$

$= |a_1| M^{n-1} + \sqrt{|a_2|} M^{n-1} + \ldots + \sqrt[n]{|a_n|} M^{n-1}$

și $M^{n-1} = M^{k-1} M^{n-k} \geqslant (\sqrt[k]{|a_k|})^{k-1} M^{n-k}$;

$\sqrt[k]{|a_k|} \cdot M^{n-1} \geqslant \sqrt[k]{|a_k|} (\sqrt[k]{|a_k|})^{k-1} M^{n-k} = |a_k| M^{n-k}$

deci $M^n > |a_1| M^{n-1} + |a_2| M^{n-2} + \ldots + |a_n|$ adică $P(x) > 0$ pentru $|x| > M$. Așadar $|x_k| \leqslant M$; $k = 1, 2, \ldots, n$.

45. Avem, ca și în problema precedentă,

$|P(x)| > |x|^n \left(1 - \frac{|a_1|}{|x|} - \frac{|a_2|}{|x|^2} - \ldots - \frac{|a_n|}{|x|^n}\right)$ iar, pentru

$$x > 2M$$

$$|P(x)| > |x|^n \left(1 - \frac{|a_1|}{2M} - \frac{|a_2|}{2^2 M^2} - \ldots - \frac{|a_n|}{2^n M^n}\right).$$

Însă $\sqrt[k]{|a_k|} \leqslant M$ și deci $|a_k| \leqslant M^k$ adică $\frac{|a_k|}{M^k} \leqslant 1$.

Așadar $|P(x)| > |x|^n \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \ldots - \frac{1}{2^n}\right)$

sau $|P(x)| > x^n \cdot \frac{1}{2^n} > 0$, pentru $x > 2M$. Deci $|x_k| \leqslant M$,

$$k = 1, 2, \ldots . n.$$

46. Avem $|P(x)| \geqslant |x|^n - |a_1| |x|^{n-1} - |a_2| |x|^{n-2} -$ $- \ldots - |a_n| = |x|^n \left(1 - \frac{|a_1|}{|x|} - \frac{|a_2|}{|x|^2} - \ldots - \frac{|a_n|}{|x|^n}\right)$, iar pentru $|x| > M$, $|P(x)| > |x|^n \left(1 - \frac{|a_1|}{M} - \frac{|a_2|}{M^2} -\right.$ $\left. - \ldots - \frac{|a_n|}{M^n}\right)$. Dar $\sqrt[k]{n\,|a_k|} \leqslant M$; $\frac{|a_k|}{M^k} < \frac{1}{n}$ și deci, pentru $|x| > M$, avem $|P(x)| > |x|^n \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \ldots - \frac{1}{n}\right) =$ $= 0$. Rezultă că $|x_k| \leqslant M$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Scanned with OKEN Scanner

47. Din teorema lui *Cauchy* (vezi Cap. III) rezultă că polinomul Q are o singură rădăcină pozitivă r. Pentru $x > r$ avem $Q(x) > 0$, iar pentru $0 < x < r$ avem $Q(x) < 0$. Avem inegalitatea

$$|P(x)| = |a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n| \geqslant |a_0x^n| - |a_1x^{n-1} + \ldots + a_n|.$$

Dar $|a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2} + \ldots + a_n| \leqslant |a_1|\,|x|^{n-1}+|a_2|\,|x|^{n-2} + \ldots + |a_n|$ și deci $|P(x)| \geqslant |a_0|\,|x^n| - |a_1|\,|x|^{n-1} - \ldots - |a_n| = |Q(|x|)|$. Pentru $|x| > r$ avem $|P(x)| \geqslant Q(|x|) > 0$ și deci P nu are rădăcini de modul superior lui r.

Rezultă că, dacă x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ sînt rădăcinile lui P, atunci $|x_k| \leqslant r$. Dacă r' este rădăcina pozitivă a lui R avem $R(r') = 0$ sau echivalent $|a_n|\left(\frac{1}{r'}\right)^n - |a_{n-1}|\left(\frac{1}{r'}\right)^{n-1} - \ldots - |a_0| = 0$ și deci $\frac{1}{r'}$ este unica rădăcină pozitivă a polinomului $Q_1(x) = |a_n|\,x^n - |a_1|\,x^{n-1} - \ldots - |a_0|$. Polinomul $P_1(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ are ca rădăcini pe $\frac{1}{x_k}$ $k = 1, 2, \ldots, n$ unde x_k sînt rădăcinile lui P. Din cele demonstrate anterior rezultă $\left|\frac{1}{x_k}\right| \leqslant \left|\frac{1}{r'}\right|$ și deci $x_k| \geqslant |r'|$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

48. Fie r rădăcina pozitivă a ecuației $|a_0|\,x^n - |a_1|x^{n-1} - \ldots - |a_n| = 0$. Avem deci $|a_0|\,r^n = |a_1|\,r^{n-1} + |a_2|\,r^{n-2} + \ldots + |a_n|$. Din $b = \max\limits_{k=1,2,\ldots,n} \frac{|a_k|}{|a_{k-1}|}$ deducem $\frac{|a_k|}{|a_{k-1}|} \leqslant b$ și deci $|a_1| \leqslant b\,|a_0|$, $|a_2| \leqslant b\,|a_1| \leqslant b^2\,|a_0|$, $\ldots$, $|a_n| \leqslant b\,|a_{n-1}| \leqslant b^n\,|a_0|$ așa că

$$|a_0|\,r^n \leqslant b\,|a_0|\,r^{n-1} + b^2\,|a_0|\,r^{n-2} + \ldots + b^n\,|a_0|$$ adică

$$\left(\frac{r}{b}\right)^n - \left(\frac{r}{b}\right)^{n-1} - \ldots - \frac{r}{b} - 1 < 0.$$ Dar, deoarece $\alpha^n + \alpha^{n-1} + \ldots + \alpha - 1 = 0$ rezultă $\frac{r}{b} \leqslant \alpha$ adică $r \leqslant b\alpha$ și deci, aplicînd teorema lui *Kakeya*, avem $|x_k| \leqslant r \leqslant b\alpha$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Scanned with OKEN Scanner

Fie acum r' rădăcina ecuației $|a_0|x^n + |a_1|x^{n-1} + \ldots + |a_{n-1}|x - |a_n| = 0$ și deci $|a_0|(r')^n + |a_1|(r')^{n-1} + \ldots + |a_{n-1}|r' - |a_n| = 0$. Din $\frac{|a_k|}{|a_{k-1}|} \geqslant a$ deducem $|a_{k-1}| \leqslant \frac{|a_k|}{a}$ și deci $|a_{n-1}| \leqslant \frac{|a_n|}{a}$, $|a_{n-2}| \leqslant \frac{|a_{n-1}|}{a} \leqslant \frac{|a_n|}{a^2}, \ldots$ $\ldots, |a_0| \leqslant \frac{|a_n|}{a^n}$.

De aici rezultă $\left(\frac{r'}{a}\right)^n + \left(\frac{r'}{a}\right)^{n-1} + \ldots + \frac{r'}{a} - 1 \geqslant 0$ sau $\left(\frac{a}{r'}\right)^n - \left(\frac{a}{r'}\right)^{n-1} - \ldots - \frac{a}{r'} \leqslant 0$ și deci $\frac{a}{r'} \leqslant \alpha$ adică $r' \geqslant \frac{a}{\alpha}$. Din teorema lui *Kakeya* avem $|x_k| \geqslant r'$ și deci $|x_k| \geqslant \frac{a}{\alpha}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. În problema 42 s-a arătat că $2 > \alpha$ și prin urmare $\frac{a}{2} < |x_k| < 2a$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

49. Avem $P(x) = a_0x^n\left(1 + \frac{a_1}{a_0x} + \ldots + \frac{a_n}{a_0x^n}\right)$ și dacă notăm $\max\limits_{k=1,2,\ldots,n}\left|\frac{a_k}{a_0}\right| = A$, atunci, pentru $|x| > 1$ vom avea

$$|P(x)| \geqslant |a_0x^n| \cdot \left|1 - \left|\frac{a_1}{a_0x} + \ldots + \frac{a_n}{a_0x^n}\right|\right| \geqslant$$

$$\geqslant |a_0x^n| \cdot \left|1 - \left(\left|\frac{a_1}{a_0}\right| \cdot \frac{1}{|x|} + \ldots + \left|\frac{a_1}{a_0}\right| \cdot \frac{1}{|x|^n}\right)\right| \geqslant$$

$$\geqslant |a_0x^n| \cdot \left[1 - \frac{A}{|x| - 1}\right] \text{ adică}$$

$$|P(x)| \geqslant |a_0x^n| \cdot \frac{|x| - 1 - A|}{|x| - 1}$$

ceea ce ne arată că $|P(x)| > 0$ dacă $|x| > 1 + A$, afirmație, evident echivalentă cu cea pe care voiam s-o dovedim.

Polinomului

$$Q(x) = \frac{1}{\rho^n}P(x) = a_0\left(\frac{x}{\rho}\right)^n + \frac{a_1}{\rho}\left(\frac{x}{\rho}\right)^{n-1} + \ldots + \frac{a_n}{\rho^n}$$

îi aplicăm rezultatul precedent și avem

$$\frac{|x|}{\rho} \leqslant 1 + \max_{k=1,2,\ldots,n}\left|\frac{a_k}{a_0\rho^k}\right|$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$|x| < \rho + \max_{k=1,2,\ldots,n} \left| \frac{a_k}{a_0 \rho^{k-1}} \right|$$

(cea de-a doua inegalitate), iar dacă se consideră valoarea particulară

$$\rho = \max_{k=1,2,\ldots,n} \sqrt[k]{\left| \frac{a_k}{a_0} \right|} \left(\text{se consideră chiar } \frac{a_1}{a_0} \text{ în cazul } k=1 \right)$$

atunci, deoarece avem $\left| \frac{a_k}{a_0} \right| \leqslant \rho^k$ sau $\left| \frac{a_k}{a_0 \rho^{k-1}} \right| \leqslant \rho$, rezultă că

$$\max_{k=1,2,\ldots,n} \left| \frac{a_k}{a_0 \rho^{k-1}} \right| \leqslant \rho$$

și prin urmare, conform rezultatului precedent, avem

$$|x| \leqslant \rho + \rho = 2\rho = 2 \cdot \max_{k=1,2,\ldots,n} \sqrt[k]{\left| \frac{a_k}{a_0} \right|}.$$

50. Fie $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$; $g(x) = b_0 x^n - b_1 x^{n-1} - \ldots - b_n$. Avem

$$|f(x)| = |a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n| \geqslant |a_0 x^n| - |a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n| \geqslant |a_0| \cdot |x|^n - (|a_1| \cdot |x|^{n-1} + \ldots + |a_n|) \geqslant b_0 |x|^n - (b_1 |x|^{n-1} + \ldots + b_n) = g(|x|).$$

Dar, deoarece g are o rădăcină pozitivă și numai una (teorema lui *Cauchy*), atunci, notînd această rădăcină cu x_0, vom avea $|f(x)| \geqslant g(|x|) > 0$ ceea ce ne arată că modulele rădăcinilor lui f sînt cel mult egale cu x_0.

Scanned with OKEN Scanner

1. Avem $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = \frac{p^2-1}{3}$ și deci:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = -p^3 + p(p^2 - 1) = -p.$$

$$P(x_1^3) - P(x_2^3) = 3x_1^6 + 3px_1^3 + p^2 - 1 - 3x_2^6 - 3px_2^3 - p^2 + 1 = 3(x_1^3 - x_2^3)(x_1^3 + x_2^3) + 3p(x_1^3 - x_2^3) =$$
$$= 3(x_1^3 - x_2^3)(x_1^3 + x_2^3 + p) = 3(x_1^3 - x_2^3)(-p + p) = 0.$$

2. 1) $\Delta = (3a + 1)^2 + 4a^3 = 4a^3 + 9a^2 + 6a + 1 =$
$= 4a^3 + a^2 + 8a^2 + 2a + 4a + 1 = a^2(4a + 1) +$
$+ 2a(4a + 1) + (4a + 1) = (a + 1)^2(4a + 1).$

$\{a \mid \Delta \geqslant 0\} = \{-1\} \cup \left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$ deci condiția din enunț este suficientă.

Altfel:

$$a \geqslant -\frac{1}{4} \Rightarrow 3a \geqslant -\frac{3}{4} \Rightarrow 3a + 1 \geqslant \frac{1}{4} \Rightarrow (3a + 1)^2 \geqslant \frac{1}{16} \quad (1)$$

$$a \geqslant -\frac{1}{4} \Rightarrow a^3 \geqslant -\frac{1}{64} \Rightarrow 4a^3 \geqslant \frac{-4}{64} \Rightarrow 4a^3 \geqslant \frac{-1}{16}. \quad (2)$$

Adunînd (1) cu (2), avem $(3a + 1)^2 + 4a^3 \geqslant \frac{1}{16} - \frac{1}{16}$ deci $\Delta \geqslant 0$.

2) Notăm $\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} = E$.

$$E^3 = x_1 + x_2 + 3\sqrt[3]{x_1x_2}(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}) \Rightarrow E^3 =$$
$$= 3a + 1 - 3aE$$

Scanned with OKEN Scanner

deci

$$E^3 + 3aE - 3a - 1 = 0,\ (E-1)(E^2 + E + 1 + 3a) = 0,$$

$$E_1 = 1,$$

$$E_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 - 12a}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3(1+4a)}}{2};$$

pentru $a > -\frac{1}{4}$, $E_{2,3} \in C - \mathbf{R}$, iar pentru $a = -\frac{1}{4}$. $E_{2,3} = -\frac{1}{2}$ sînt rădăcini străine deoarece $x_1 = x_2 = \frac{1}{8}$ și deci $E = 1$; așadar $\forall\ a \geqslant -\frac{1}{4}$, $E = 1$.

3) Cum $\Delta = (a+1)^2(4a+1)$ este necesar și suficient ca $4a + 1 = (2b+1)^2$, $b \in Z$ și deci $a = b(b+1)$.

4) Ecuația devine $x^2 - (3b^2 + 3b + 1) - b^3(b+1)^3 = 0$, iar rădăcinile sînt $x_1 = -b^3$, $x_2 = (b+1)^3$.

3. $P(mx_1 + nx_2) = a(mx_1 + nx_2)^2 + b(mx_1 + nx_2) + c = (am^2x_1^2 + bmx_1 + c) + (an^2x_2^2 + bnx_2 + c) + 2amnx_1x_2 - c = P(mx_1) + P(nx_2) + 2amn \cdot \frac{c}{a} - c = P(mx_1) + P(nx_2) + c(2mn - 1)$ și deci $P(mx_1 + nx_2) = P(mx_1) + P(nx_2) \Leftrightarrow c(2mb - 1) = 0 \Leftrightarrow mn = \frac{1}{2}$.

4. Dacă x_1 este rădăcina comună și x_2, x_3 celelalte rădăcini, atunci $x_1 + x_2 = -a, x_1x_2 = bc$, $x_1 + x_3 = -b$, $x_1x_3 = ac$.

Evident $x_1, x_2, x_3 \neq 0$ și deci $\frac{x_1x_2}{x_1x_3} = \frac{bc}{ac}$ de unde:

$\frac{x_2}{x_3} = \frac{b}{a}$. Din $x_1 + x_2 = -a$, $x_1 + x_3 = -b$ rezultă

$$x_2 - x_3 = b - a.$$

Deci $\frac{x_2}{x_3} = \frac{b}{a}$ și $x_2 - x_3 = b - a$ rezultă $x_2 = b$, $x_3 = a$, iar $x_1 = -a - b = c$.

Deci coeficienții verifică relația $a + b + c = 0$.

Ecuația cu rădăcinile $x_2 = b$, $x_3 = a$ este $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ adică $x^2 + cx + ab = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

5. Fie $P(x) = 6(x-a)(x-b) + 3a(x-b) + 2b(x-a)$. $P(a) = 3a(a-b)$. $P(b) = 2b(b-a)$. $P(0) = ab$. $P(a)P(b) = -6ab(a-b)^2$. $P(a)P(b)P(0) = -6a^2b^2(a-b)^2 < 0$. Deci cel puțin unul din numerele $P(a)$, $P(b)$, $P(0)$ este negativ. Dar $\lim\limits_{x\to\infty} P(x) = +\infty$ și deci $P(x)$ ia atît valori negative cît și valori pozitive. Prin urmare $P(x) = 0$ are rădăcini reale.

6. Inegalitatea se scrie $P(x) = x^2(b + c - 2a) + x(a - 2b + c) + a + b - 2c \geqslant 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. $P(1) = b + c - 2a + a - 2b + c + a + b - 2c = 0$. Deoarece P are rădăcina 1 și ia valori nenegative, este necesar ca 1 să fie rădăcina dublă și deci $x_2 = \dfrac{a+b-2c}{b+c-2a} = 1$, adică $a = c$. Avem $P(x) = (b-a)x^2 + 2(a-b)x + b - a = (b-a)(x^2 + x + 1)$ și deci $P(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow a = c \leqslant b$.

7. Punem $y = x - k$ și deci $x = y + k$. $P(x) \geqslant k$ pentru $x \geqslant k \Leftrightarrow Q(y) = ay^2 + y(2ak + b) + ak^2 + k(b-1) + c \geqslant 0$ pentru $y \geqslant 0$ oricare ar fi $k \in \mathbf{R}$. Rezultă imediat $a > 0$.

Pentru $y = 0$ rezultă $ak^2 + k(b-1) + c \geqslant 0$ pentru orice k și deci $(b-1)^2 - 4ac \leqslant 0$.

Vom arăta că $a > 0$ și $4ac \geqslant (b-1)^2$ este și condiție suficientă. Discriminantul ecuației $Q(y) = 0$ este $\Delta = b^2 - 4ac + 4ak$; dacă $k \leqslant \dfrac{4ac - b^2}{4a}$, $\Delta \leqslant 0$ și deci $Q(y) \geqslant 0$ pentru orice y. Dacă $k > \dfrac{4ac - b^2}{4a}$ atunci suma rădăcinilor ecuației $Q(y) = 0$ este $S = -\dfrac{(2ak + b)}{a} = -2k - \dfrac{b}{a}$ și deci $S < \dfrac{b^2 - 4ac}{2a} - \dfrac{b}{a} = \dfrac{4 - 4ac - 2b}{a}$. Cum $b^2 - 4ac - 2b \leqslant -1$ avem $S < 0$. Produsul $P = \dfrac{ak^2 + k(b-1) + c}{a} \geqslant 0$ și deci $Q(y)$ nu are rădăcini strict pozitive. Așadar $Q(y) \geqslant 0$ pentru $y \geqslant 0$.

8. Presupunem $a \geqslant 0$.

$x = 0 \Rightarrow |c| \leqslant 1$

$x = 1 \Rightarrow |a + b + c| \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant a + b + c \leqslant 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -1 - b \leqslant a + c \leqslant 1 - b$

$x = -1 \Rightarrow |a - b + c| \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant a - b + c \leqslant 1 -$
$-1 + b \leqslant a + c \leqslant 1 + b$

deci $-1 + |b| \leqslant a + c \leqslant 1 - |b|$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezultă $a + |b| \leqslant 1 - c \leqslant 2$ de unde $|0| \leqslant |b| \leqslant 2 - a$ și deci $0 \leqslant a \leqslant 2$.

$$\frac{8}{3}a^2 + 2b^2 \leqslant \frac{8}{3}a^2 + 2(4 - 4a + a^2) = \frac{14}{3}a^2 - 8a + 8.$$

Expresia $\frac{14}{3}a^2 - 8a + 8$ este un trinom de gradul al doilea definit pe $[0, 2]$, care își atinge maximul la unul din capete. Pentru 0 se obține valoarea 8, iar pentru 2 valoarea $\frac{32}{3}$. Deci $\frac{8}{3}a^2 + 2b^2 \leqslant \frac{32}{3}$. Maximul se realizează pentru $a = 2$, $b = 0$ și $c = -1$, sau $a = -2$, $b = 0$, $c = 1$. Trinomul astfel determinat verifică condiția inițială $|2x^2 - 1| \leqslant 1$.

9. $|cx^2 + bx + a| \leqslant |cx^2 + a| + |bx| \leqslant |cx^2 + a| + |b|$ dar $|cx^2 + a|$ își atinge maximul pentru $x = \pm 1$ sau $x = 0$.

Avem deci $|cx^2 + a| \leqslant \max(|c + a|, |a|)$.

$|cx^2 + bx + a| \leqslant \max(|x + a|, |a|) + |b|$

dar $|a + c| \leqslant 1 - |b|$ (vezi problema precedentă) și deci $|c + a| + |b| \leqslant 1$, $|a| + |b| \leqslant 2$, de unde $\max(|c + a|, |a|) + |b| \leqslant 2$ și deci $|cx^2 + bx + a| \leqslant 2$.

10. Vom căuta un polinom de gradul întîi care să verifice condiția cerută. Fie acesta $R(x) = ax + b$. Rezultă identitatea:

$(x^2 + 3x + 1)(ax + b) = (x^3 - 2)c + 1$ din care avem: $a = c$, $3a + b = 0$, $a + 3b = 0$, $b = -2c + 1$ adică un sistem incompatibil.

Căutăm acum un polinom de gradul al doilea: $R(x) = ax^2 + bx + c$.

Condiția revine la:

1°. $(ax^2 + bx + c)(x^2 + 3x + 1) = (x^3 - 2)(ax + d) + 1$.

Identificînd coeficienții deducem: $R(x) = \frac{8}{41}x^2 - \frac{1}{41}x - \frac{5}{41}$.

Făcînd în 1° $x = \sqrt[3]{2}$ obținem:

$$R(\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{2^2} + 3\sqrt[3]{2} + 1) = 1 \text{ și deci}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2^2} + 3\sqrt[3]{2} + 1} = \frac{8\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2} - 5}{41}.$$

Scanned with OKEN Scanner

11. Căutăm mai întîi punctele fixe ale funcției $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. $P(x) = x \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 8 = x \Leftrightarrow 2(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, și deci $P(2) = 2$.

În relația dată facem $x = 2$: $f(P(2)) = P(f(2))$ adică $P(f(2)) = f(2)$ adică $f(2)$ este punct fix pentru funcția P. Cum singurul punct fix al lui P este 2 avem $f(2) = 2$ și deci f admite punctul fix 2.

12. Dacă $P(-1)P(1) \leqslant 0$ atunci P se anulează în intervalul $[-1, 1]$ și deci $\min\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P(x)| = 0$ și inegalitatea se reduce la $\max\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P(x)| \geqslant \frac{1}{2}$ care rezultă din:

$$|P(1)| + |P(-1)| + 2|P(0)| = |1 + a + b| + |1 - a + b| + 2|b| \geqslant 2.$$

Rămîne de studiat cazul $P(-1) \cdot P(1) > 0$. Fie

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P(x)| = M; \quad \min_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P(x)| = m.$$

Avem evident $M - m \geqslant ||P(1)| - |P(-1)||$. Cum $P(1)$ și $P(-1)$ au același semn $||P(1)| - |P(-1)|| = |P(1) - P(-1)| = |1 + a + b - 1 + a - b| = 2|a|$ și deci $M - m \geqslant 2|a|$.

Pentru $|a| \geqslant \frac{1}{4}$ rezultă $M - m \geqslant \frac{1}{2}$.

Pentru $|a| < \frac{1}{4}$ și $P(1)P(-1) > 0$ rezultă $-\frac{a}{2} \in (-1, 1)$.

Dacă $P\left(-\frac{a}{2}\right) P(-1) \leqslant 0$ rezultă că P se anulează în intervalul $\left[-1, -\frac{a}{2}\right]$ și deci $m = 0$ adică inegalitatea se reduce la $M \geqslant \frac{1}{2}$. Presupunem deci că $P(-1)$, $P(1)$ și $P\left(-\frac{a}{2}\right)$ au același semn. În acest caz:

$$M - m \geqslant \left||P(1)| - \left|P\left(-\frac{a}{2}\right)\right|\right| = \left|P(1) - P\left(-\frac{a}{2}\right)\right| =$$

$$= \left|1 + a + b + \frac{a^2 - 4b}{4}\right| = \left|1 + a + \frac{a^2}{4}\right| = \frac{(a+2)^2}{4} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(2 - 1/4)^2}{4} = \frac{49}{64} > \frac{1}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

13. Ecuația se scrie: $(x-a)^3 - b^3 + (x-b)^3 - a^3 = 0$

sau $(x-a-b)\left[(x-a)^2 + b(x-a) + b^2\right] +$

$+ (x-b-a)\left[(x-b)^2 + a(x-b) + a^2\right] = 0$

$(x-a-b)\left[2x^2 - x(a+b) + 2(a^2 - ab + b^2)\right] = 0.$

Soluțiile sînt $x_1 = a + b$,

$$x_{2,3} = \frac{a + b \pm \sqrt{-3(5a^2 - 6ab + 5b^2)}}{4}.$$

14. Ecuația se scrie succesiv:

$$(x-a)^3 + (x-b)^3 - (a-b)^3 = 0;$$

$(x-a)^3 + (x-a)\left[(x-b)^2 + (x-b)(a-b) + (a-b)^2\right] = 0,$

$(x-a)\left[(x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-b)(a-b) + (a-b)^2\right] = 0,$

$$(x-a)\left[2x^2 - x(a+3b) + 2a^2 + 3b^2 - 3ab\right] = 0.$$

Soluțiile sînt $x_1 = a$, $x_{2,3} = \frac{a + 3b \pm (a-b)\cdot i\sqrt{15}}{4}$.

15. Ecuația se scrie: $x(x-a)(2x-a) + bx - a = 0$.
Pentru $b = 1$ avem $(x-a)(2x^2 - ax + 1) = 0$ cu rădăcinile

$$x_1 = a \text{ și } x_{2,3} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 8}}{4}.$$

Pentru $b = 2$ avem $(2x-a)(x^2 - ax + 1) = 0$ cu rădăcinile

$$x_2 = \frac{a}{2}, \quad x_{2,3} = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

16. $c = \frac{b^2}{3a}$ $(a \neq 0)$ deci $ax^3 + bx^2 + \frac{b^2 x}{3a} + d = 0$ sau înmulțind cu $27a^2$:

$$27a^3x^3 + 27a^2x^2b + 9axb^2 + 27a^2d = 0 \text{ și deci}$$

$$(3ax + b)^3 + 27a^2d - b^3 = 0.$$

Punînd $27a^2d - b^3 = k^3$ avem: $(3ax + b)^3 = -k^3$ și deci

$$3ax + b = -k \text{ și } 3ax + b = -k\left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Pentru $a = 0$ avem $b = 0$ și ecuația devine $cx + d = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

17. Ecuația se scrie $\frac{x}{a}+1+\frac{x}{b}+1=\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}$

sau $x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{a}{x+a}-1+\frac{b}{x+b}-1$ deci

$$x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-x\left(\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}\right) \text{ adică}$$

$x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}\right)=0$. Avem $x_1=0$ și

$\frac{1}{a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x+a}=0$ adică: $\frac{x+a+b}{a(x+b)}+\frac{x+a+b}{b(x+a)}=0$

deci $x_2=-a-b$ și $\frac{1}{a(x+b)}+\frac{1}{b(x+a)}=0$ și deci $x_3=-\frac{2ab}{a+b}$.

18. Ecuația se mai scrie:

$$\frac{1}{ax+b-c}+\frac{1}{-a+bx+c}=\frac{1}{x(a+b+c)}-\frac{1}{a-b+cx} \text{ sau}$$

$$\frac{x(a+b)+b-a}{(ax+b-c)(-a+bx+c)}=\frac{a-b-x(a+b)}{x(a+b+c)(a-b+cx)}.$$

De aici rezultă $x_1=\frac{a-b}{a+b}$ și

$x(a+b+c)(a-b+cx)+(ax+b-c)(-a+bx+c)=0$

adică $x^2(a+c)(b+c)+2c(a-b)x+(b-c)(c-a)=0$,

de unde $x_2=\frac{b-c}{b+c}$; $x_3=\frac{c-a}{c+a}$.

19. Ecuația se mai scrie:

$$(n+1)x^3+\frac{3an(n+1)}{2}x^2+\frac{3a^2n(n+1)(2n+1)}{6}x+$$

$$+\frac{a^3n^2(n+1)^2}{4}=0$$

sau $4x^3+6anx^2+2a^2n(2n+1)+a^3n^2(n+1)=0$ deci

$(2x+na)(2x^2+2nax+n(n+1)a^2)=0$ de unde $x_1=-\frac{an}{2}$,

$$x_{2,3}=\frac{a(-n\pm\sqrt{-n^2-2n})}{4}.$$

20. Fie $x=w+v$ o rădăcină. Avem: w^3+v^3+

$+3wv(w+v)+p(w+v)+q=0$. Cum $wv=-\frac{p}{3}$ avem

$w^3+v^3=-q$. Ecuația care are rădăcinile w^3 și v^3

Scanned with OKEN Scanner

este $k^2 + qk\frac{p^3}{27} = 0$ și deci $k\frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = \frac{q}{2} \pm$

$\pm\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ și deci $w = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,\omega$ unde ω este o rădăcină cubică a unității.

Pentru $w = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,\omega$ găsim

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,\omega^2 \text{ și deci}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,\omega + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,\omega^2$$

ceea ce constituie formulele lui *Cardan*.

21. $P\left[\frac{(a+1)^2}{a}\right] = \frac{2(a+1)^6 - 12a(a+1)^4 + 18a^2(a+1)^2 - 9a^3}{a^3} =$

$$= \frac{2(a^6+6a^5+15a^4+20a^3+15a^2+6a+1) - 12a(a^4+4a^3+6a^2+4a+1)}{a^3} +$$

$$+ \frac{18a^2(a^2+2a+1) - 9a^3}{a^3} = \frac{2a^6 - 5a^3 + 2}{a^3}.$$

Punînd $x = \frac{(a+1)^2}{a}$, $P(x) = 0 \Rightarrow P\left[\frac{(a+1)^2}{a}\right] = 0$ și deci

$2a^6 - 5a^3 + 2 = 0$, de unde $a^3 = 2$ sau $a^3 = \frac{1}{2}$.

Pentru $a^3 = 2$ avem $a = \sqrt[3]{2}\,\omega$ unde $\omega^3 = 1$, și deci $x = \frac{(\sqrt[3]{2}\,\omega + 1)^2}{\sqrt[3]{2}\,\omega}$. Aceleași soluții se obțin și pentru $a^3 = \frac{1}{2}$.

22. Ecuația se scrie (1) $4x^3 - 3x + 1 + m(4x^3 + x - 1) = 0$. Deoarece ecuația dată admite o rădăcină independentă de m rezultă că ecuațiile

$$4x^3 - 3x + 1 = 0$$
$$4x^3 + x - 1 = 0$$

admit o rădăcină comună.

Fie a rădăcina comună. Avem $4a^3 - 3a + 1 = 0$ și $4a^3 + a - 1 = 0$.

Prin scădere se obține $a = \frac{1}{2}$. De aici $4x^3 - 3x + 1 = (2x-1)(2x^2+x-1)$ și $4x^3+x-1 = (2x-1)(2x^2+x+1)$ deci ecuația (1) se scrie: $(2x-1)[2x^2+x-1+m(2x^2+x+1)]=0$ sau $(2x-1)[2x^2(m+1)+x(m+1)+m-1]=0$ și deci $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{2,3} = -\frac{1}{4}\left(1 \pm \sqrt{\frac{9-7m}{m+1}}\right)$.

23. Ecuația se scrie $(x+2a)^3 - 5(x+2a) = 0$ adică $(x+2a)[(x+2a)^2-5] = 0 \Rightarrow x_1 = -2a$, $x_{2,3} = -2a \pm \sqrt{5}$. Avem rădăcină rațională dacă $a \in Q$ sau

$-2a \pm \sqrt{5} = r \in Q$ și deci $a = \frac{r \pm \sqrt{5}}{2}$ unde $r \in Q$.

Se observă ușor că ecuația nu poate avea două rădăcini raționale pentru nici o valoare a lui a.

24. Fie $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Căutăm condiția necesară și suficientă pentru ca rădăcinile să fie în progresie geometrică: $x_1 + x_2 + x_3 = -a$; $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b$; $x_1x_2x_3 = -c$. Punem $x_1 = w$, $x_2 = wq$, $x_3 = wq^2$ și obținem: $w(1+q+q^2) = -a$; $w^2q(1+q+q^2) = b$; $q^3w^3 = -c$.

Rezultă imediat $wq = -\frac{b}{a}$ care înlocuit în ultima relație dă $b^3 = a^3c$. Pentru ecuația dată avem: $a = 1 - \sqrt{2}$; $b = 5\sqrt{2} - 6$. Verificăm relația $c = \left(\frac{b}{a}\right)^3$:

$$\frac{b}{a} = \frac{5\sqrt{2}-6}{1-2\sqrt{2}} = \frac{(5\sqrt{2}-6)(1+2\sqrt{2})}{-7} = \frac{14-7\sqrt{2}}{-7} = \sqrt{2}-2$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^3 = (\sqrt{2}-2)^3 = 2\sqrt{2} - 12 + 12\sqrt{2} - 8 =$$

$$= 14\sqrt{2} - 20 = c.$$

Avem $x_2 = wq = -\frac{b}{a} = 2 - \sqrt{2}$. Înlocuind $w = \frac{2-\sqrt{2}}{q}$ în $w(1+q+q^2) = 2\sqrt{2} - 1$ găsim $q_1 = \sqrt{2}$, $q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ și deci celelalte rădăcini sînt:

$$\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \text{ și } \sqrt{2}(2-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2.$$

Scanned with OKEN Scanner

25. Fie $x^3 + ax^2 + bx + c$ cu rădăcini x_1, x_3, x_2. Din relațiile lui *Viète*: $x_1 + x_2 + x_3 = -a$; $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b$; $x_1x_2x_3 = -c$ vom obține condiția necesară și suficientă ca ecuația să aibă rădăcinile în progresie aritmetică. Punem: $x_1 = w - r$, $x_2 = w$, $x_3 = w + r$. Din prima relație se obține $w = -\frac{a}{3}$. Celelalte relații devin: $3w^2 - r^2 = b$ și $w(w^2 - r^2) = -c$, rezultă $r^2 = 3w^2 - b = \frac{a^2}{3} - b$ și deci $-\frac{a}{3}\left(\frac{a^2}{9} - \frac{a^2}{3} + b\right) = -c$ adică $2a^3 = 9(ab - 3c)$.

În cazul nostru $a = 3(1 - \sqrt{2})$, $b = 5 - 6\sqrt{2}$, $c = 3 - \sqrt{2}$, $2a^3 = 54(1 - \sqrt{2})^3 = 54(7 - 5\sqrt{2}) \cdot$ $\cdot 9(ab - 3c) = 9(51 - 33\sqrt{2} - 9 + 3\sqrt{2}) = 9(42 - 30\sqrt{2}) =$ $= 54(7 - 5\sqrt{2})$ și deci relația $2a^3 = 9(ab - 3c)$ este verificată. $w = -\frac{a}{3} = \sqrt{2} - 1$; $r^2 = 3w^2 - b = 3(3 - 2\sqrt{2}) - 5 +$ $+ 6\sqrt{2} = 4$ deci $r = \pm 2$ și rădăcinile sînt $x_2 = \sqrt{2} - 1$, $x_1 = \sqrt{2} - 3$, $x_3 = \sqrt{2} + 1$.

26. Notînd cu ω o rădăcină cubică complexă a unității rădăcinile ecuației date se pot scrie $u\omega$, $u\omega^2$, v. Relațiile lui *Viète* se scriu:

$$u(\omega + \omega^2) + v = -a$$
$$u^2\omega^2 + uv(\omega + \omega^2) = b$$
$$u^2\omega^3 v = -c.$$

Cum $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ și $\omega^3 = 1$, relațiile devin:

$$v - u = -a$$
$$u^2 - 2v = b$$
$$u^2 v = -c$$

din $u - v = a$ și $u(u - v) = b$ deducem pentru $a \neq 0$, $u = \frac{b}{a}$, $v = \frac{b - a^2}{a}$ și deci $\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{(b - a^2)}{a} = -c$, rădăcinile fiind $\frac{b}{a}\omega$, $\frac{b}{a}\omega^2$, $\frac{b - a^2}{a}$ $(b \neq 0)$. Dacă $a = 0$ rezultă $b = 0$ și ecuația $x^3 = -c$ $(c \neq 0)$ are toate rădăcinile distincte și $x_1^3 = x_2^3 = x_3^3 = -c$.

Scanned with OKEN Scanner

27. Avem 1°. $x_1 + x_2 + x_3 = -p$; 2°. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = p^2 - 29$. Punem condiția ca x_1, x_2, x_3 să verifice ecuația $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

$$x_1^3 + px_1^2 + qx_1 + r = 0$$
$$x_2^3 + px_2^2 + qx_2 + r = 0$$
$$x_3^3 + px_3^2 + qx_3 + r = 0.$$

Prin însumarea acestor egalități avem:

3°. $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + p(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + q(x_1 + x_2 + x_3) + 3r = 0$.

Din relațiile 1°, 2°, 3° obținem $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3pq - p^3 - 3r$.

Analog obținem

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 = \frac{3pq}{r^2} - \frac{q^3}{r^3} - \frac{3}{r}.$$

Din $\frac{p + r}{p - r} = \frac{1 + q}{1 - q}$ deducem $r = pq$ și deci

$$(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) =$$
$$= (3r - p^3 - 3r)\left(\frac{3r}{r^2} - \frac{q^3}{r^3} - \frac{3}{r}\right) = -\frac{p^3(-q^3)}{r^3} = 1.$$

28. $P(1 + x_1) = 2(1 + x_1)^3 - 3(1 + x_1)^2 + m =$
$= 2x_1^3 - 3x_1^2 + m + 6x_1^2 + 6x_1 + 2 - 3 - 6x_1 = 6x_1^2 - 1.$

Așadar, $E = P(1 + x_1)\, P(1 + x_2)\, P(1 + x_3) =$
$= (6x_1^2 - 1)(6x_2^2 - 1)(6x_3^2 - 1) = 216(x_1x_2x_3)^2 - 36(x_1^2x_2^2 +$
$+ x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2) + 6(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 1 = 216(x_1x_2x_3)^2 -$
$- 36[(\Sigma x_1x_2)^2 - 2x_1x_2x_3\Sigma x_1)] + 6[(\Sigma x_1)^2 - 2\Sigma x_1x_2] - 1.$

Dar $\Sigma x_1 = \frac{3}{2}$, $\Sigma x_1x_2 = 0$, $x_1x_2x_3 = -m$ deci

$$E = 216m^2 - 72m \cdot \frac{3}{2} + 6 \cdot \frac{9}{4} - 1 = 216m^2 - 108m + \frac{25}{2}.$$

Cum $m \in \mathbf{R}$ rezultă $E \in \mathbf{R}$.

29. Formăm ecuația în y care are ca rădăcini pe $y_i = \frac{1}{1 + x_i^2}$, $i = 1, 2, 3$. Eliminînd pe x între relațiile:

1°. $x^3 + ax^2 + bx + a = 0$; 2°. $y = \frac{1}{1 + x^2}$. Înlocuim în 1° pe $x^2 = \frac{1}{y} - 1$. $x\left(\frac{1}{y} - 1\right) + a\left(\frac{1}{y} - 1\right) + bc + a = 0$

Scanned with OKEN Scanner

de unde $x = \frac{-a}{1+y(b-1)}$ care înlocuit în 2° dă: $y^3(b-1)^2 - y^2(b-1)(b-3) + y(a^2-2b+3) - 1 = 0$. Din prima relație a lui *Viète* avem:

$$y_1 + y_2 + y_3 = \frac{(b-1)(b-3)}{(b-1)^2} = \frac{b-3}{b-1} = 1 - \frac{2}{b-1}.$$

30. Avem relațiile: $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (2x_1x_2 + x_3^2)$ dar $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = a^2 - 2$ și deci $(x_1 - x_2)^4 = [a^2 - 2 - (2x_1x_2 + x_3^2)^2] = (a^2-2)^2 - 2(a^2-2)(2x_1x_2 + x_3^2) + (2x_1x_2 + x_3^2)^2$.

$E = 3(a^2-2)^2 - 2(a^2-2)(x_1 + x_2 + x_3)^2 + 4\Sigma x_1^2x_2^2 + 4x_1x_2x_3 \Sigma x_1 + \Sigma x_1^4 = 3(a^2-2)^2 - 2a^2(a^2-2) + 4(1-2ab) + 4ab + \Sigma x_1^4$.

Folosind relația stabilită în rezolvarea problemei 36

$$\Sigma x_1^4 = 4ab - 4a^2 + a^4 + 1 \text{ și deci}$$

$$E = 3(a^2-2)^2 - 2a^2(a^2-2) + 4 - 4ab + 4ab - 4a^2 + a^4 + 2 = 2(a^2-3)^2.$$

31. 1) Fie $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3. Polinomul cu rădăcinile x_1^2, x_2^2, x_3^2 se obține eliminînd x între $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ și $x^2 = y$.

Avem succesiv $xy + ay + by + c = 0$, $x = -\frac{ay+c}{y+b} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{ay+c}{y+b}\right)^2 = y \Rightarrow y^3 + y^2(2b - a^2) + y(b^2 - 2ac) - c^2 = 0$

și deci $2b - a^2 = a$; $b^2 - 2ac = b$, $-c^2 = c$.

Rezolvînd acest sistem găsim polinoamele:

$P_1(x) = x^3$; $P_2(x) = x^3 - x^2$; $P_3(x) = x^3 + x^2 + x$;

$P_4(x) = x^3 - 2x^2 + x$; $P_5(x) = x^3 - 1$;

$P_6(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

2) Se constată că fiecare din polinoamele găsite verifică condiția $P(x^2) = -P(x)P(-x)$.

Vom arăta acum că polinoamele care verifică condiția $P(x^2) = -P(x)P(-x)$ verifică și condiția de la punctul 1).

Într-adevăr, dacă x_1 este o rădăcină a lui $P(x)$ avem $P(x_1) = 0$ și deci $P(x_1^2) = 0$.

Așadar, singurele polinoame sînt $P_1, P_2, \ldots, P_6$.

Scanned with OKEN Scanner

32. Notăm $2y = z$ și ecuația (2) se scrie:

(3) $$z^3 + 2az^2 + (a^2 + b)z + ab - c = 0.$$

Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației (1) și x_1, z_2, z_3 rădăcinile ecuației (3). Avem relațiile $x_1 + x_2 + x_3 = -a$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b$, $x_1x_2x_3 = -c$.

$$z_1 + z_2 + z_3 = -2a = 2(x_1 + x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) + (x_1 + x_3)$$

$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = a^2 + b = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = (x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + (x_2^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + (x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = (x_1+x_2)(x_1 + x_3) + (x_1 + x_2)(x_2+x_3)+(x_2 + x_3)(x_1 + x_3).$$

$$z_1z_2z_3 = -ab+c = (x_1+ x_2+ x_3)(x_1x_2 + x_1x_3+ x_2x_3)\,!\,x_1x_2x_3 = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3).$$

Deducem de aici: $z_1 = x_2 + x_3$, $z_2 = x_1 + x_3$, $z_3 = x_1 + x_2$. Notînd cu y_1, y_2, y_3 rădăcinile ecuației (2) și ținînd seama că am pus $z = 2y$ rezultă

$$y_1 = \frac{z_1}{2} = \frac{x_2 + x_3}{2};\quad y_2 = \frac{z_2}{2} = \frac{x_1 + x_3}{2};\quad y_3 = \frac{z_3}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

33. Pentru $k = 3$. Avem $S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3c + \frac{1}{2}a[(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2] > 0$.

Pentru $k > 3$, $S_k = aS_{k-1} - bS_{k-2} + cS_{k-3}$.

Dacă $b > 0$ rădăcinile sînt pozitive și deci $S_k > 0$. Dacă $b < 0$ vom demonstra prin inducție după k. Pentru $k = 1, 2, 3$, $S_k > 0$. Presupunem $S_{k-1} > 0$, $S_{k-2} > 0$, $S_{k-3} > 0$ și rezultă $S_k = aS_{k-1} + (-b)S_{k-2} + cS_{k-3} > 0$ deoarece $a, -b, c > 0$.

34. Pentru $n = 1$ avem $x_1 + x_2 + x_3 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ și deci $b = -a$. Pentru $n = 2$ avem:

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2$ adică $a^2 - 2b = b^2 - 2ac$.

Cum $b = -a$ rezultă $a(c + 1) = 0$.

a) Considerăm $a = 0$; ecuația este $x^3 + c = 0$ și rădăcinile sînt $x_1 = -c$, $x_2 = u_1x_1$, $x_3 = u_2x_1$ unde u_1, u_2 sînt rădăcinile cubice complexe ale unității

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n = x_1^n(1 + u_1^n + u_2^n);$$
$$x_1^nx_2^n + x_1^nx_3^n + x_2^nx_3^n = x_1^{2n}(u_1^n + u_2^n + (u_1u_2)^n).$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum $u_1u_2 = 1$ rezultă condiția $x_1^n(x_1^n - 1) = 0$, $\forall n \in N$ și deci pentru $n = 1$ avem $x_1(x_1 - 1) = 0$.

Pentru $x_1 = 0$ avem $a = b = c = 0$

Pentru $x_1 = 1$ avem $a = b = 0$, $c = -1$.

b) Considerăm $c = -1$. Ecuația este $x^3 + ax^2 - ax - 1 = 0$ sau $(x - 1)(x^2 + x(a + 1) + 1) = 0$. Deoarece $x_1 = 1$ și $x_2x_3 = 1$ relația de condiție este verificată.

Ecuațiile căutate sînt: $x^3 = 0$ și $x^3 + ax^2 - ax - 1 = 0$.

35. Avem: $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$ și deci $x_1 + x_2 = \frac{-x_1x_2}{x_3} > 0$. Analog se arată că $x_2 + x_3 > 0$, $x_1 + x_3 > 0$.

Cum $x_1 + x_2 + x_3 = a$ rezultă $a - x_1 > 0$, $a - x_2 > 0$, $a - x_3 > 0$.

Avem: $\sqrt{a - x_1} = \sqrt{a - x_2} + \sqrt{a - x_3} \Leftrightarrow \sqrt{x_2 + x_3} = \sqrt{x_1 + x_2} + \sqrt{x_1 + x_3} \Leftrightarrow x_2 + x_3 = 2x_1 + x_2 + x_3 + 2\sqrt{x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}$.

Cum $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$ avem

$$\sqrt{a - x_1} = \sqrt{a - x_2} + \sqrt{a - x_3}, \Leftrightarrow x_1 + \sqrt{x_1^2} = 0, \Leftrightarrow x_1 + |x_1| = 0;$$

ceea ce este adevărat deoarece $x_1 < 0$.

36. Fie $E_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k$.

Avem $E_1 = -\frac{b}{a}$; $E_2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$

x_1, x_2, x_3 fiind rădăcini ale ecuației date avem:

$$\begin{aligned} ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d &= 0 \\ ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d &= 0 \\ ax_3^3 + bx_3^2 + cx_3 + d &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

de unde prin adunare: $aE_3 + bE_2 + cE_1 + 3d = 0$ și deci

$$E_3 = \frac{3abc - 3da^2 - b^3}{a^3}.$$

Relațiile (1) de înmulțire respectiv cu x_1, x_2, x_3 și prin adunare obținem: $aE_4 + bE_3 + cE_2 + dE_1 = 0$ și deci

$$E_4 = \frac{4a^2bd - 4ab^2c + b^4 - 2a^2c^2}{a^4}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din $(x_1 + x_2 + x_3)^2 \geqslant 3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$ și $(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 \geqslant 3x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)$ deducem: $b^2 \geqslant 3ac$ și $c^2 \geqslant 3bd$ și deci $b^4 \geqslant 3ab^2c$, $2a^2c^2 \geqslant 6a^2bd$ și deci

$$E_4 \geqslant \frac{10a^2bd - ab^2c}{a^4} = \frac{b}{a^3}(10ad - bc).$$

37. Fie $P'(x) = 6k(x - x_1)(x - x_2)$ și deci

$$P(x) = k(2x^3 - 3x^2(x_1 + x_2) + 6x_1x_2x) + h.$$

Considerăm $k > 0$ și $x_1 < x_2$.

$$P(x_1) = k(2x_1^3 - 3x_1^3 - 3x_1^2x_2 + 6x_1^2x) + h =$$
$$= k(-x_1^3 + 3x_1^2x_2) + h.$$
$$P(x_1) - P(x_2) = k(x_2^3 - x_1^3 + 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2) =$$
$$= k(x_2 - x_1)^3 = c > 0.$$

Fie $Q(x) = P(x) - \frac{P(x_1) + P(x_2)}{2}$. Avem $\lim\limits_{x \to -\infty} Q(x) = -\infty$;

$Q(x_1) = \frac{P(x_1) - P(x_2)}{2} = \frac{c}{2} > 0$. $Q(x_2) = \frac{P(x_2) - x(P_1)}{2} = -c < 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} Q(x) = +\infty$ și deci ecuația $P(x) = \frac{P(x_1) + P(x_2)}{2}$ are toate rădăcinile reale. Dacă $x_1 = x_2$ ecuația $P(x) = \frac{P(x_1) + P(x_2)}{2}$ are rădăcină triplă.

38. 1) $P(x) = k$, $\forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow (m + n + p)x^3 - 3(ma + nb + pc)x^2 + 3(ma^2 + nb^2 + pc^2)x - ma^3 - nb^3 - pc^3 - k = 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Rezultă condițiile:

$$m + n + p = 0$$
$$ma + nb + pc = 0$$
$$ma^2 + nb^2 + pc^2 = 0$$

și deoarece $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \neq 0$, singura soluție a acestui sistem este $m = n = p = 0$ și deci $k = -ma^3 - nb^3 - pc^3 = 0$.

2) $P(x)$ este o funcție strict crescătoare, deoarece, $P'(x) = 3m(x - a)^2 + 3n(x - b)^2 + 3p(x - c)^2 > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$ dacă $m, n, p > 0$. Deci $P(x) = 0$ are o singură rădăcină reală.

Scanned with OKEN Scanner

3) $P(a) = P(b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n(a-b)^3 + p(a-c)^3 = 0 \\ m(b-a)^3 + p(b-c)^3 = 0 \end{cases}$

Eliminîndu-l pe p din aceste două relații se obține:

$$m(c-a)^3 + n(c-b)^3 = 0 \quad \text{deci} \quad P(c) = 0.$$

39. Pentru $a = 0$ rădăcinile sînt reale.

Ecuația 1) $\operatorname{tg} 3y = \frac{b}{a}$ are soluțiile $y = \frac{\operatorname{arctg} \frac{b}{a} + k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$.

Ecuația 1) se mai scrie $\frac{3\operatorname{tg} y - \operatorname{tg}^3 y}{1 - 3\operatorname{tg}^2 y} = \frac{b}{a}$. Notînd $\operatorname{tg} y = x$ obținem ecuația din enunț cu soluțiile $x = \operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arctg} \frac{b}{a} + k\pi}{3}\right)$, $k = 1, 2, 3$, adică trei rădăcini reale.

40. Avem $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} P(x) = \infty$, $P(0) = -ab$, $P(-a) = ac$.

Avem tabelul

x	$-\infty$		$-a$		0		∞
$P(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$			

și deci ecuația are trei rădăcini reale dacă $a \neq 0$ Pentru $a = 0$ avem: $P(x) = x^3 - x(b + c) = 0$ și ecuația are rădăcinile $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{b + c}$.

41. Vom studia rădăcinile ecuației cu șirul lui *Rolle*

$P'(x) = 3x^2 + 6ax + 3b$. $P'(x) = 0$, $x_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$.

Cum $b \leqslant 0$ rezultă $a^2 - b \geqslant 0$ și deci rădăcinile sînt reale. Calculăm $P(x_i)$, $i = 1, 2$, ținînd seama că $x_i^2 + 2ax_i + b = 0$ adică $x_i^2 = -2ax_i - b$.

$$P(x_i) = x_i^3 + 3ax_i^2 + 3bx_i + ab = x_i^2(x_i + 3a) + 3bx_i + ab =$$
$$= -(2ax_i + b)(x_i + 3a) + 3bx_i + ab = -2ax_i^2 - 6a^2x_i +$$
$$+ 2bx_i - 2ab = 2a(2ax_i + b) - 6a^2x_i + 2bx_i - 2ab =$$
$$= -2x_i(a^2 - b).$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $b = 0$ ecuația are rădăcinile reale. Pentru $b < 0$ avem $x_1 x_2 = b < 0$ și deci $x_1 < 0 < x_2$, și deci $P(x_1) = -2x_1(a^2 - b) > 0$ și $P(x_2) = -2x_2(a^2 - b) < 0$. Avem tabelul:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$P(x)$	$-\infty$	$+$	$-$	$+\infty$

și deci ecuația are rădăcinile reale.
Condiția necesară și suficientă ca ecuația să aibă rădăcinile reale este $b \leqslant 0$ sau $b = a^2$.

42. Avem $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$, $P(-2) = 4 - 2b + c \geqslant 0$, $P(0) = c \leqslant 0$ $\lim\limits_{x \to \infty} P(x) = +\infty$ și deci ecuația are rădăcini în intervalele $(-\infty, -2]$, $[-2, 0]$ și $[0, \infty)$.

43. Fie $P(x) = x^3 - 3ax^2 + bx + a$.

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = \frac{x^4}{4} - ax^3 + \frac{bx^2}{2} + ax \Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{4} - a + \frac{b}{2} + a - \frac{1}{4} - a - \frac{b}{2} + a = 0.$$

Din prima formulă de medie rezultă

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = 2P(\xi) = 0.$$

Generalizare. Ecuația $P(x) = a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \ldots + a_{2n}x + a_{2n+1} = 0$, $a_i \in R$, $i = 0, 1, \ldots, 2n+1$ are cel puțin o rădăcină în intervalul $(-1, 1)$ dacă

$$\frac{a_1}{2n+1} + \frac{a_3}{2n-1} + \frac{a_5}{2n-3} + \ldots + \frac{a_{2n+1}}{1} = 0.$$

Se arată că $\int_{1}^{-1} P(x)dx = 0$ de unde rezultă ca și în cazul precedent existența lui ξ $(-1, 1)$ astfel ca $P(\xi) = 0$.

44. 1) Avem $x_1 + x_2 + x_3 = -a$ și $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a^2 + 4a + 11}{2}$.

Înlocuim $a = -(x_1 + x_2 + x_3)$ și avem

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 4(x_1 + x_2 + x_3) + 11}{2}$$

Scanned with OKEN Scanner

adică

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4(x_1 + x_2 + x_3) + 11 = 0$$

sau: $$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 2)^2 = 1.$$

2) Dacă rădăcinile sînt reale avem: $(x_i - 2)^2 \leqslant 1$, $i = 1, 2, 3$, adică $-1 \leqslant x_i - 2 < 1$ și deci $x_i \in [1, 3]$, $i = 1, 2, 3$.

Observație. Pentru ca ecuația să aibă rădăcinile reale este necesar și suficient să arătăm că există valori ale lui a pentru ca polinomul derivat să aibă rădăcinile reale (v. problema 37). Avem $6x^2 + 4ax + a^2 + 4a + 11 = 0$. $\Delta = -2(a^2 + 12a + 33)$. Pentru $a \in [-6 - \sqrt{3}, -6 + \sqrt{3}]$ există b astfel ca ecuația dată să aibă rădăcini reale.

45. Deoarece $x_1 + x_2 + x_3 = -3a$ problema se reduce la a demonstra că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geqslant (x_1 + x_2 + x_3)^2$ adică $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \leqslant 0$ și deci $b \leqslant 0$. Pentru $a = 0$ ecuația devine $x^3 + bx = 0$ și are rădăcinile reale pentru $b \leqslant 0$. Dacă $a \neq 0$ punem $x = ay$ și ecuația devine $y^3 + 3y^2 + \frac{b}{a^2}y - 4 = 0$. Punem $\frac{b}{a^2} = c$ și rămîne să arătăm că dacă ecuația $y^3 + 3y^2 + cy - 4 = 0$ are rădăcinile reale atunci $c \leqslant 0$.

Ecuația se scrie $f(y) = y^2 + 3y - \frac{4}{y} + c = 0$, $f'(y) = 2y + 3 + \frac{4}{y^2}$, $f'(y) = 0 \Rightarrow 2y^3 + 3y^2 + 4 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (y + 2)(2y^2 - y + 2) = 0$. Singura rădăcină reală este $y = -2$. Șirul lui *Rolle* pentru $f(y)$ este:

y	$-\infty$		-2		0		∞
$f(y)$	∞		c	∞	$-\infty$		$+\infty$

Pentru ca rădăcinile să fie reale trebuie ca $c \leqslant 0$ adică $b = a^2 c \leqslant 0$.

46. Se observă că ecuația nu poate avea rădăcini strict negative.

Deci $x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Din $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ și $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 2$. Deducem $x_2 + x_3 = 3 - x_1$, $x_1(3 - x_1) + x_2x_3 = 2$ și deci $x_1^2 - 3x_1 + 2 = x_2x_3$.

Deoarece $(x_2 + x_3)^2 \geqslant 4x_2x_3$ avem $(3 - x_1)^2 \geqslant 4(x_1^2 - 3x_1 + 2)$ și deci $3x_1^2 - 6x_1 - 1 \leqslant 0$ adică $x_1 \leqslant \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$. Cum $x_1^2 - x_2x_3 = 3x_1 - 2$ rezultă $x_1^2 - x_2x_3 \leqslant 3 \cdot \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} - 2 = 2\sqrt{3} + 1$. Maximul se realizează pentru $x_1 = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$ și $x_2 = x_3 = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$ adică pentru $a = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

47. Punînd $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ avem $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$; ecuația $3x^2 + 2ax + b = 0$ nu are rădăcini reale. Cum $\lim\limits_{n \to -\infty} f(x) = -\infty$ și $\lim\limits_{n \to -\infty} f(x) = \infty$ avem rădăcină reală unică x_0 pentru $f(x) = 0$.

Așadar, $x_0^3 + ax_0^2 + bx_0 + c = 0$ sau $x_0(x_0^2 + ax_0 + b) = -c$, și deci $|x_0| \, |x_0^2 + ax_0 + b| = |c|$. Din condiția $a^2 < 3b$ rezultă $b > 0$ și apoi $a^2 < 4b$. Minimul pentru $|x_0^2 + ax_0 + b|$ este $\left|\frac{4b - a^2}{4}\right| = \frac{4b - a^2}{4}$ deci $|c| = |x_0| \, |x_0^2 + ax_0 + b| \geqslant \frac{|x_0|(4b - a^2)}{4}$ de unde $|x_0| \leqslant \frac{4|c|}{4b - a^2}$.

48. Fie $P(x) = 2x^3 + 2(a - b)x^2 + (a^2 + 2b^2)x + c$. Este necesar ca și ecuația $P'(x) = 0$ să aibă rădăcinile reale: $6x^2 + 4(a - b)x^2 + a^2 + 2b^2 = 0$. Discriminantul este $\Delta = -8(a + 2b)^2$; cum $\Delta \geqslant 0$ rezultă $a = -2b$, și deci ecuația $P'(x) = 0$ are rădăcina dublă $x = \frac{b - a}{3} = b$.

Dacă $P(x) = 0$ are rădăcinile distincte $x_1 < x_2 < x_3$ atunci ecuația $P'(x) = 0$ are două rădăcini distincte în intervalele (x_1, x_2), (x_2, x_3). Dacă $P(x) = 0$ are o rădăcină dublă, atunci această rădăcină este simplă pentru $P'(x) = 0$, adică se obține din nou contradicție. Singura posibilitate este deci $x_1 = x_2 = x_3 = b$, adică $P(x) = 2(x - b)^3$ și deci $c = -2b^3$.

Scanned with OKEN Scanner

49. Punem $x_i = \operatorname{tg} \alpha_i$, $i = 1, 2, 3$. Relația $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1$ conduce la $\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 0$ și deci $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, adică

$$\alpha_3 = \frac{\pi}{2} + k\pi - (\alpha_1 + \alpha_2) \text{ și } \operatorname{tg} \alpha_3 = \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha_2).$$

Relațiile $x_1 + x_2 + x_3 = -a$, $x_1x_2x_3 = -b$ devin:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{ctg}(\alpha_1+\alpha_2) = -a, \ \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{ctg}(\alpha_1+\alpha_2) = -b;$$

$$a + b = -[\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha_2)(1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2)] =$$

$$= -\left[\frac{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos\alpha_1 \cos\alpha_2} + \frac{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}{\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2)}\right] =$$

$$= -2\,\frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos(\alpha_1 + \alpha_2)\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)\,[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos(\alpha_1 - \alpha_2)]};$$

$$a - b = \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha_2) - (\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2) - \operatorname{ctg}(\alpha_1+\alpha_2) =$$

$$= \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot (\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 - 1) - (\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2) =$$

$$= \frac{-(\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 - 1)^2 - (\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2)^2}{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2} = -\frac{1}{\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin(\alpha_1+\alpha_2)} =$$

$$= -\frac{2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)\,[\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos(\alpha_1 - \alpha_2)]}.$$

Notînd $\alpha_1 + \alpha_2 = u$, $\alpha_1 - \alpha_2 = v$ avem echivalențele

$$9(a^2 + b^2) + 14ab \geqslant 32 \Leftrightarrow 8(a + b)^2 + (a - b)^2 \geqslant 32;$$

$$32(\sin^2 u + \cos u \cos v)^2 + 4 \geqslant 32 \cdot \sin^2 u(\cos u + \cos v)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 u(\cos u + \cos v)^2 - (\sin^2 u + \cos u \cos v)^2 \leqslant \frac{1}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\cos 2v \cos 2v + \cos^2 2u}{2} \leqslant \frac{1}{8} \Leftrightarrow 4\cos^2 2u + 4\cos 2u \cos 2v +$$

$$+ 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow (2\cos 2u + \cos 2v)^2 + \sin^2 2v \geqslant 0,$$

ceea ce este evident.

50. Avem relațiile: $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a$, $x_1x_2x_3 = b$. Din $x_3 = 1 - (x_1 + x_2)$ deducem $a - b = x_1x_2 + (x_1 + x_2)(1 - x_1 - x_2) - x_1x_2(1 - x_1 - x_2) = (x_1 + x_2)(1 - x_1)(1 - x_2)$. Din $x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$ și

Scanned with OKEN Scanner

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$ rezultă $x_1 \leqslant 1$ și $x_2 \leqslant 1$ și deci numerele $x_1 + x_2$, $1 - x_1$, $1 - x_2$ sînt pozitive. Din inegalitatea mediilor aritmetică și geometrică deducem

$$\sqrt[3]{(x_1 + x_2)(1 - x_1)1 - x_2} \leqslant \frac{(x_1 + x_2) + (1 - x_1) + (1 - x_2)}{3}$$

și deci $a - b = (x_1 + x_2)(1 - x_1)(1 - x_2), \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.

51. a) Folosind relațiile lui *Viète* și condițiile verificate de coeficienți deducem: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} > x_1 + x_2 + x_3$ și $x_1x_2x_3 > 1$. Presupunem $x_3 = 1$ și avem $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > x_1 + x_2$ și $x_1x_2 > 1$ adică $(x_1 + x_2)(1 - x_1x_2) > 1$ și $x_1x_2 > 1$ și deci $x_1 + x_2 < 0$, ceea ce contrazice faptul că rădăcinile sînt pozitive. Deci ecuația nu admite rădăcina $x = 1$.

b) Presupunem că $x_1, x_2, x_3 > 1$ și rezultă contradicția $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} < x_1 + x_2 + x_3$. Presupunem că $x_1 > 1$; $x_2 < 1$; $x_3 < 1$ și punem $x_1 = \frac{1}{y}$, $y < 1$. Condițiile devin: $x_2x_3 > y$ și $\frac{(x_2 + x_3)(1 - x_2x_3)}{x_2x_3} + y - \frac{1}{y} > 0$. Dar dacă $a > b > 0$ atunci $a - \frac{1}{a} > b - \frac{1}{b}$ deci $x_2x_3 - \frac{1}{x_2x_3} > y - \frac{1}{y}$ și deci $\frac{(x_2 + x_3)(1 - x_2x_3)}{x_2x_3} + x_2x_3 - \frac{1}{x_2x_3} > 0$, ceea ce revine la $(x_2 - 1)(x_3 - 1)(x_2x_3 - 1) > 0$ adică contradicție. Rămîne numai posibilitatea indicată de enunț deoarece $x_1, x_2, x_3 < 1$ contrazice $x_1x_2x_3 > 1$.

52. a) $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ și deci $P'(x) = (x - x_1)(x - x_2) + (x - x_1)(x - x_3) + (x - x_2)(x - x_3)$; $P'(x_1) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)$; $P'(x_2) = (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)$; $P'(x_3) = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$.

$$E_2 = \frac{x_1^2}{P'(x_1)} + \frac{x_2^2}{P'(x_2)} + \frac{x_3^2}{P'(x_3)} = \frac{x_1^2}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} +$$

$$+ \frac{x_2^2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{x_3^2}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} =$$

$$= \frac{-x_1^2(x_2 - x_3) - x_2^2(x_2 - x_1) - x_3^2(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x - x_1)} = 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

b) $E_0 = \frac{1}{P'(x_1)} + \frac{1}{P'(x_2)} + \frac{1}{P'(x_3)} = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} +$

$$+ \frac{1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} =$$

$$= \frac{-(x_2 - x_3) - (x_3 - x_1) - (x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)} = 0.$$

$$E_1 = \frac{x_1}{P'(x_1)} + \frac{x_2}{P'(x_2)} + \frac{x_3}{P'(x_3)} =$$

$$= \frac{-x_1(x_2 - x_3) - x_2(x_3 - x_1) - x_3(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)} = 0.$$

Fie $Q(x) = mx + n$.

$$\frac{Q(x_1)}{P'(x_1)} + \frac{Q(x_2)}{P'(x_2)} + \frac{Q(x_3)}{P'(x_3)} = mE_1 + nE_0 = 0.$$

53. Dacă rădăcina este reală avem cazurile:

a) $x_1 = 1$ și deci $1 + a + b + c = 0$. Ecuația devine $x^3 + ax^2 + bx - 1 - a - b = 0$, adică $x^3 - 1 + a(x^2 - 1) + b(x - 1) = 0$ sau $(x - 1)[x^2 + x(a + 1) + a + b + 1] = 0$.

b) $x_1 = -1$ și deci $-1 + a - b + c = 0$. Ecuația devine $x^3 + ax^2 + bx + 1 - a + b = 0$ adică $x^3 + 1 + a(x^2 - 1) + b(x + 1) = 0$ sau $(x + 1)[x^2 + x(a - 1) - a + b + 1] = 0$.

Dacă $x_1 \in \mathbb{C} - \mathbf{R}$ atunci ecuația admite și rădăcina $\bar{x}_1$. Fie $x_1 = u + iv$, $u^2 + v^2 = 1$, $u, v \in \mathbf{R}$. $P(x)$ se divide prin $(x - x_1)(x - \bar{x}_1) = (x - u - iv)(x - u + iv) = x^2 - 2ux + 1$, $u \in \mathbf{R}$ și $|u| < 1$ (cazul $|u| = 1$ a fost tratat anterior).

Avem deci identitatea $P(x) = (x^2 - 2ux + 1)(x + t)$ și deci $t - 2u = a$; $1 - 2ut = b$; $t = c$, rezultă $u = \frac{c - a}{2}$ și relația $1 - c(c - a) = b$. Avem și condiția $|c - a| < 2$. Rădăcinile sînt $x_3 = -c$, $x_{1,2} = \frac{c - a}{2} \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{c - a}{2}\right)^2}$.

54. a) Cum derivata nu are rădăcini reale și ecuația are grad impar rezultă că avem o rădăcină și numai una, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

b) Cum pentru orice x corespunde un $t(x)$ și numai unul corespondența $x \to t(x)$ definește o funcție pe $\mathbf{R}$.

Funcția $x(t) = -t^3 - 3t$, $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o bijecție derivabilă cu $x'(t) \neq 0$. Inversa sa $t(x)$ este și ea derivabilă

Scanned with OKEN Scanner

și avem $t'(4) = \frac{1}{x'(t(4))}$; $t(4)$ este soluția reală a ecuației $t^3 + 3t + 4 = 0$ și deci $t(4) = -1$. Deci $t'(4) = \frac{1}{x'(-1)}$; $x'(t) = -3t^2 - 3$ deci $x'(-1) = -6$ și deci $t'(4) = -\frac{1}{6}$.

c) Graficul lui $t(x)$ este simetricul grafului funcției $x(t)$ față de prima bisectoare a axelor.

55. Fie s_1 o rădăcină a ecuației date.

Sistemul $(a_{11} - s_1)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0$
$a_{21}x_1 + (a_{22} - s_1)x_2 + a_{23}x_3 = 0$
$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - s_1)x_3 = 0$

avînd determinantul nul admite soluții nebanale. Putem considera deci x_1, x_2, x_3 nu toate nule.

Înmulțim ecuațiile sistemului respectiv cu $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ și după însumare obținem:

$$a_{11}x_1\bar{x}_1 + a_{22}x_2\bar{x}_2 + a_{33}x_3\bar{x}_3 + a_{12}(x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1) + a_{13}(x_1\bar{x}_3 + x_3\bar{x}_1) + a_{23}(x_2\bar{x}_3 + x_3\bar{x}_2) = s_1(x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3),$$

deoarece $a_{ij} = \bar{a}_{ij}$.

Dacă punem $x_1 = m_1 + n_1 i$, $x_2 = m_2 + n_2 i$ $(m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbf{R})$ avem

$$x_1\bar{x}_1 = (m_1 + n_1 i)(m_1 - n\,\mathrm{i}) = m_1^2 + n_1^2 = x_1^2.$$

$$x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1 = (m_1 + n_1\mathrm{i})(m_2 - n_2\mathrm{i})(m_1 - n_1\mathrm{i}) + (m_2 + n_2\mathrm{i})(m_1 - n_1\mathrm{i}) = 2(m_1m_2 + n_1n_2) \in \mathbf{R}.$$

Deoarece $x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + x_3\bar{x}_3 = |x_1|^3 + |x_2|^2 + |x_3|^2 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

$$s_1 = \frac{a_{11}|x_1|^2 + a_{22}|x_2|^2 + a_{33}|x_3|^2 + 2a_{12}(m_1m_2 + n_1n_2) + 2a_{13}(m_1m_3 + n_1n_3) + 2a_{23}(m_2m_3 + n_2n_3)}{|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2}$$

și deci $s_1 \in \mathbf{R}$. Analog se arată că $s_2, s_3 \in \mathbf{R}$.

56. Avem $M = \max\limits_{x \in C,\ |x|=1} |P(x)| \geqslant \max\limits_{x \in C,\ |x|=1} |Re\ P(x)|$.

În particular, $M \geqslant \left| Re\ P\left(\cos\frac{k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{3}\right)\right|$, $\forall k \in Z$,

și deci $M \geqslant \left| a\cos k\pi + b\cos\frac{2k\pi}{3} + c\cos\frac{k\pi}{3} + d\right|$ $\forall k \in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

Dînd lui k valorile 0, 1, 2, 3, obținem:

$$M \geqslant |a+b+c+d|;\quad M \geqslant \left|-a-\frac{b}{2}+\frac{c}{2}+d\right|;$$

$$M \geqslant \left|a-\frac{b}{2}-\frac{c}{2}+d\right|;\quad M \geqslant |-a+b-c+d|;$$

Dacă $a+d$ și $b+c$ au același semn atunci $|a+b+c+d| = |a+d|+|b+c|$ și deci $M \geqslant |a+d|+|b+c|$.

Dacă $a+d$ și $b+c$ au semne diferite atunci $\left|a-\frac{b}{2}-\frac{c}{2}+d\right| = |a+d|+\frac{1}{2}|b+c|$ și deci $M \geqslant |a+d|+\frac{1}{2}|b+c|$. În ambele cazuri avem

(1) $M \geqslant |a+d|+\frac{1}{2}|b+c|$.

Dacă $d-a$ și $c-b$ au același semn atunci $\left|-a-\frac{b}{2}+\frac{c}{2}+d\right| = |d-a|+\frac{1}{2}|c-b|$ și deci $M \geqslant |d-a|+\frac{1}{2}|c-b|$.

Dacă $d-a$ și $c-b$ au semne diferite atunci $|-a+b-c+d| = |d-a|+|c-b|$.

În ambele cazuri avem (2) $M \geqslant |d-a|+\frac{1}{2}|c-b|$.

Deoarece $|b \pm c| \geqslant ||b|-|c||$ rezultă din (1) și (2) că:

$$M \geqslant |a+d|+\frac{1}{2}||b|-|c||$$ și $$M \geqslant |d-a|+\frac{1}{2}||b|-|c||$$

și cum $|a|+|d| = |a+d|$ sau $|a|+|d| = |a-d|$ rezultă inegalitatea din enunț.

57. Punînd $x^2-a=y$ avem:

$y^2+x=a$ și $x^2-y=a$ de unde $x^2-y^2-(x+y)=0$ sau $(x+y)(x-y-1)=0$ adică $y=-x$ și $y=x-1$ și deci $x^2+x-a=0$ și $x^2-x+1-a=0$.

58. Ordonăm după puterile lui m și avem:

$$m^2x+m(1-x^3)+x^4-x^3-x^2+x=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Considerăm necunoscuta m și găsim

$$m = \frac{x^3 - 1 \pm (x^3 - 2x^2 + 1)}{2x}$$

adică $m = x^2 - x$ și $m = \frac{x^2 - 1}{x}$ și deci $x^2 - x - m = 0$ și

$$x^2 - mx - 1 = 0$$

de unde:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4m}}{2}; \quad x_{3,4} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4}}{2}.$$

59. Dacă $a = 0$ rezultă $c = 0$ și ecuația este bipătrată; condiția de realitate a rădăcinilor este $b \leqslant 0$, $d \geqslant 0$, $b^2 \geqslant 4d$. Dacă $a \neq 0$ atunci $d = \frac{c^2}{a^2}$ și ecuația devine $a^2x^4 + a^3x^3 + a^2bx^2 + a^2cx + c^2 = 0$ adică

$$(ax^2 + c)^2 + a^2x(ax^2 + c) + a(ab - 2c)x^2 = 0.$$

Punînd $ax^2 + c = y$ avem:

$$y^2 + a^2xy + a(ab - 2c)x^2 = 0 \text{ și deci}$$

$$y = \frac{-a^2x \pm \sqrt{a^4x^2 - 4a(ab - 2c)x^2}}{2} =$$

$$= -\frac{x}{2}(a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4a^2b + 8ac})$$

adică $ax^2 + c = -\frac{x}{2}(a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4a^2b + 8ac})$ sau

$$2ax^2 + x(a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4ab + 8ac}) + 2c = 0.$$

Condițiile de realitatea rădăcinilor sînt:

$a^4 - 4a^2b + 8ac \geqslant 0$ și $(a^2 \pm \sqrt{a^4 - 4a^2b + 8ac})^2 - 16ac \geqslant 0$

care se reduc la $a^4 - 4ab + 8ac \geqslant 0$; $a^4 - 2ab - 4ac \geqslant 0$ și $a^2b^2 - 2a^3c + 4c^2 \geqslant 0$.

60. Ecuația se scrie

$$\left(x^2 + \frac{c}{a}\right)^2 + ax^3 + \left(b - \frac{2c}{a}\right)x^2 + cx = 0 \text{ sau}$$

$$\left(x^2 + \frac{c}{a}\right)^2 + ax\left(x^2 + \frac{c}{a}\right) + \left(b - \frac{2c}{a}\right)x^2 = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

și deci $x^2 + \frac{c}{a} = \frac{-ax \pm x\sqrt{a^2 - 4b + \frac{8c}{a}}}{2}$ adică avem de rezolvat ecuațiile $x^2 + x\,\frac{\left(a \pm \sqrt{a^2 - 4b + \frac{8c}{a}}\right)}{2} + \frac{c}{a} = 0.$

61. Ecuația se scrie $x^4 + x^2(ax + b) + cx + d = 0$ și deci

$$x^2 = \frac{-(ax + b) \pm \sqrt{(ax + b)^2 - 4cx - 4d}}{2}.$$

Dar

$$(ax + b)^2 - 4cx - 4d = a^2x^2 + 2x(ab - 2c) + b^2 - 4d =$$

$$= a^2x^2 + 2x\left(\frac{a^2d}{c} + c - 2c\right) + b^2 - 4d =$$

$$= a^2x^2 + 2x\left(\frac{a^2d}{c} - c\right) + \frac{d^2a^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + 2d - 4d =$$

$$= a^2x^2 + 2ax\left(\frac{ad}{c} - \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{ad}{c} - \frac{c}{a}\right)^2 = \left(ax + \frac{ad}{c} - \frac{c}{a}\right)^2.$$

Așadar,

$$x^2 = \frac{-\left(ax + \frac{ad}{c} + \frac{c}{a}\right) \pm \left(ax + \frac{ad}{c} - \frac{c}{a}\right)}{2}.$$

62. Se observă cu ușurință că $x_1 = a$, $x_2 = b$. Efectuînd calculele ecuația devine:

$$2x^4 - 4x^3(a + b) + 6x^2(a^2 + b^2) - 4x(a^3 + b^3) +$$
$$+ 2ab[2(a^2 + b^2) - 3ab] = 0.$$

Relațiile lui *Viète* dau $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2(a + b)$; $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4 = 3(a^2 + b^2)$.

Cum $x_1 = a$, $x_2 = b$, rezultă $x_3 + x_4 = a + b$, $x_3x_4 = 2(a^2 + b^2) - 3ab$. x_3 și x_4 rezultă din ecuația $x^2 - (a + b)x + 2(a^2 + b^2) - 3ab = 0$. Se obține:

$$x_{3,4} = \frac{a + b \pm (a - b)i\sqrt{7}}{2}.$$

63. a) Fie $P(x) = x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q$. Identitatea $P(x) = P(a - x)$ revine la $m = -2a$ și $p = a^3 - an$ deci $P(x) = x^4 - 2ax^3 + nx^2 + a(a^2 - n)x + q$.

Scanned with OKEN Scanner

b) $P(x) = 0$ înseamnă $(x^2 - ax)(x^2 - ax - a^2 + n) + q = 0$. Notînd $x^2 - ax = y$ ecuația devine $y(y - a^2 + n) + q = 0$ etc.

c) $P(-1) = 0$ înseamnă:

1°). $q + n(1 - a) + 1 - 2a + a^3 = 0$. În identitatea $P(x) = (x^2 + 1)Q(x) - 40x - 10$ facem $x = i$ și avem $P(i) = -40i - 10$ adică $1 + 2ai - n + i(a^3 - an) + q = -40i - 10$, deci

2°). $q - n = -11$

3°). $a^3 + 2a - an = -40$.

Rezolvăm sistemul format din ecuațiile 1°, 2°, 3°. Prin scăderea ecuațiilor 1° și 2° avem: $n(2 - a) - 10 - 2a + a^3 = 0$. Din 3° rezultă $n = \frac{a^3 + 2a + 40}{a}$ care conduce la

$$\frac{(a^3 + 2a + 40)(2 - a)}{a} - 10 - 2a + a^3 = 0 \text{ adică}$$

$$a^3 - 2a^2 - 23a + 40 = 0$$

cu singura soluție întreagă $a = 5$. Rezultă de aici $n = 35$, $q = 24$. $P(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$. Ecuația $P(x) = 0$ are rădăcinile 1, 2, 3, 4.

64. $f(x) = [x^2 + (a + b)x + ab)]\,[x^2 + (c + d)x + cd]$. Notăm $x^2 + (a + b)x = y$ și avem:

$$g(y) = y^2 + (ab + cd)y + abcd, \quad g:\left[-\frac{(a + b)^2}{4}, \infty\right).$$

Abscisa punctului de minim a funcției g este

$$y_0 = \frac{-(ac + cd)}{2}.$$

Evident $y_0 \geqslant -\frac{(a + b)^2}{4}$. Abscisele punctelor de minim ale funcției f sînt date de $x^2 + (a + b)x + \frac{ab + cd}{2} = 0$ dică sînt

$$x_{12} = \frac{-(a + b) \pm \sqrt{(a + b)^2 - 2(ab + cd)}}{2} =$$

$$= \frac{-(a + b) \pm \sqrt{\frac{(a - b)^2 + (c - d)^2}{2}}}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Se poate arăta că funcția are și un maxim local pentru $x = -\frac{a+b}{2}$, dacă cel puțin două din numerele a, b, c, d sînt diferite.

65. Este necesar ca $f'(x) = 0$ să aibă trei rădăcini reale și distincte, de unde necesitatea că $f''(x) = 0$ să aibă rădăcinile reale și distincte:

$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c.$$

Discriminantul este $\Delta = 4(9b^2 - 24ac)$, deci $9b^2 > 24ac$ de unde $3b^2 \neq 8ac$.

66. Ecuația se scrie:

$x^4 + 2ax^3 + a^2x^2 + x^2(b - a^2) + a(b - a)x + c = 0$ sau

$(x^2 + ax)^2 + (b - a^2)(x^2 + ax) + c = 0$ și deci

$$x^2 + ax = \frac{a^2 - b \pm \sqrt{(a^2 - b)^2 - 4c}}{2} \text{ adică}$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2 - 2b \pm 2\sqrt{(a^2 - b)^2 - 4c}}{4} \text{ sau încă:}$$

$$x = -\frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{3a^2 - 2b \pm 2\sqrt{(a^2 - b)^2 - 4c}}\right).$$

Pentru ca toate rădăcinile să fie reale este necesar și suficient să avem:

$$(a^2 - b)^2 \geqslant 4c \text{ și } 3a^2 - 2b \geqslant 2\sqrt{(a^2 - b)^2 - 4c} \text{ adică}$$

$$c \leqslant \frac{(a^2 - b)^2}{4};\ 3a^2 - 2b \geqslant 0 \text{ și } \left(\frac{3a^2 - 2b}{2}\right)^2 \geqslant (a^2 - b)^2 - 4c$$

adică în final

$$b \leqslant \frac{3a^2}{4};\ \frac{a^2}{4}\left(b - \frac{5a^2}{4}\right) \leqslant c \leqslant \frac{(a^2 - b)^2}{4}.$$

67. $P(x) = ax^4 + bx^3 + \frac{b^2}{4a}x^2 + \frac{d^2}{4e}x^2 + dx + e +$

$$+ x^2\left(c - \frac{b^2}{4a} - \frac{d^2}{4e}\right) = \left(x^2\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}x\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{d}{2\sqrt{e}}x + \sqrt{e}\right)^2 + \frac{x^2}{4}\left(4c - \frac{b^2}{a} - \frac{d^2}{e}\right) > 0,$$

$\forall x \in \mathbf{R}$ și deci ecuația $P(x) = 0$ nu are rădăcini reale.

Scanned with OKEN Scanner

68. Numerele 1 și -1 nu sînt rădăcini ale lui $P(x) = 0$ deoarece

$$P(1) = 2 + a_1 + a_2 + a_3 > 0 \text{ și } P(-1) = 2 - a_1 + a_2 - a_3 > 0.$$

$$|P(x)| = |x^4 + 1 + (a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x)| \geqslant |x^4 + 1| - |a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x|.$$

Cum $|a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x| \leqslant |a_1||x^3| + |a_2||x^2| + |a_3||x| \leqslant \frac{2}{3}(|x^3| + |x^2| + |x|)$ avem $|P(x)| \geqslant |x|^4 + 1 - \frac{2}{3}(|x|^3 + |x|^2 + |x|) = (|x| - 1)^2\left(|x|^2 + \frac{4}{3}|x| + 1\right)$.

Pentru $x = \pm 1$ $|P(x)| > 0$ deci $P(x)$ nu are rădăcini reale și deci $P(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Generalizare. Fie polinomul $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + 1$. $P(x) \in R[x]$, n par și $|a_i| < \frac{2}{n-1}$. Atunci $P(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Procedînd ca mai sus și punînd $|x| = a \geqslant 0$ obținem:

$$|P(x)| \geqslant a^n + 1 - \frac{2}{n-1}(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a) =$$

$$= \frac{(a-1)^2}{n-1}[(n-1)a^{n-2} + 2(n-2)a^{n-3} + 3(n-3)a^{n-4} + \ldots +$$

$$+ 2(n-2)a + n - 1] = \frac{(a-1)^2}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)a^{k-1} > 0 \text{ dacă } a \neq 1.$$

Cum $P(1) > 0$ și $P(-1) > 0$ rezultă că $P(x)$ nu are rădăcini reale și deci $P(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

69. Pentru $x = 0$ avem $P(0) = e > 0$. Pentru $x \neq 0$, $P(x) > 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c + dy + ey^2 > 0$ unde $y = \frac{1}{x}$.

Discriminantul ecuației în x: $ax^2 + bx + c + dy + ey^2 = 0$ este $\Delta(y) = b^2 - 4ac - 4ady - 4aey^2$. Vom arăta că $\Delta(y) < 0$ arătînd că $\Delta_1 = 16a^2d^2 + 16ae(b^2 - 4ac) < 0$. $\Delta_1 < 0 \Leftrightarrow 16ae\left[\frac{ad^2}{e} - (4ac - b^2)\right] < 0$ ceea ce rezultă din condițiile inițiale. Deci $\Delta(y) < 0$, $\forall y \in \mathbf{R}$ și deci $P(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

70. Fie P un polinom cu rădăcinile a, $a+r$, $a+2r$, $a+3r$. Rădăcinile polinomului derivat sînt rădăcinile ecuației:

$$\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}+\frac{1}{x-x_4}=0 \text{ adică}$$

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-a-r}+\frac{1}{x-a-2r}+\frac{1}{x-a-3r}=0.$$

Punînd $x-a=y$ obținem

$$\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y-3r}\right)+\left(\frac{1}{y-r}+\frac{1}{y-2r}\right)=0 \text{ sau}$$

$$(2y-3r)\,(y^2-3ry+r^2)=0 \text{ și deci}$$

$$y_2=\frac{3r}{2} \text{ și } y_1+y_3=3r \text{ adică } y_1+y_3=2y_2.$$

Între rădăcinile $x'=y_1+a$, $x''=y_2+a$, $x'''=y_3+a$ ale polinomului derivat există de asemenea relația $x'+x'''=2x''$, adică sînt în progresie aritmetică.

71. Cum $\sqrt{5}$ și $-\sqrt{5}$ nu verifică ecuația rezultă că

$$x_i\in\mathcal{C}-\mathbf{R} \text{ și deci } x_{1,2}=\sqrt{5}\,(\cos\alpha\pm i\sin\alpha),$$

$$x_{3,4}=\sqrt{5}\,(\cos\beta\pm i\sin\beta)$$

care înlocuite în prima relație a lui *Viète* dau:

$$\sqrt{5}\,(2\cos\alpha+2\cos\beta)=6 \text{ și deci:}$$

1°. $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{3}{\sqrt{5}}$. Din a doua relație a lui *Viète* obținem: $20\cos\alpha\cos\beta+10=18$ și deci, 2°. $\cos\alpha\cos\beta=\frac{2}{5}$, din 1° și 2° obținem $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ (sau invers) și deci $\sin\alpha=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\beta=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Rădăcinile sînt $1\pm 2i$ și $2\pm i$.

72. Avem identitatea:

$x^4+ax^3+2x^2+cx+d=(x^2+mx+1)\,(x^2+px+d)$, $|m|<2$.

și deci

$$\begin{aligned} m+p&=a\\ 1+d+mp&=2\\ md+p&=c. \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind $p = a - m$ deducem: $m^2 - am + 1 - d = 0$ și $m(d-1) = c - a$.

Dacă $d = 1$ rezultă $c = a$; ecuația devine $P(x) = (x^2 + 1)(x^2 + ax + 1) = 0$.

Dacă $d \neq 1$, atunci $m = \frac{c-a}{d-1}$ și avem relația:

$$\left(\frac{c-a}{d-1}\right)^2 - a\frac{c-a}{d-1} + (1-d) = 0, \text{ adică}$$

$$(c-a)^2 - a(c-a)(d-1) - (d-1)^3 = 0$$

cu condiția $\left|\frac{c-a}{d-1}\right| < 2$.

Urmează să se rezolve ecuațiile

$$x^3 + \frac{c-a}{d-1}x + 1 = 0, \quad x^2 + \frac{ad-c}{d-1}x + d = 0.$$

73. Avem (1) $x_1x_2x_3x_4x_5 = -32$ și acum $|x_i| = r$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, rezultă $|x_i|^5 = 32$ și deci $r = 2$.

Rădăcinile sînt $x_1, x_2, \bar{x}_2, x_4, \bar{x}_4$ și deci (1) devine:

$-32 = x_1(x_2\bar{x}_2)(x_4, \bar{x}_4) = x_1r^2 \cdot r^2 = 16x_1$ și deci $x_1 = -2$.

Rădăcina $x = 2$ are ordinul de multiplicitate 0 și deci avem relațiile $a_i = 2^{5-2i}a_{n-i}$ (vezi problema 166). adică $b = a_1 = 8(-2) = -16$. $8 = a_2 = 2a$ deci $a = 4$ și ecuația devine

$$x^5 - 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 16x + 32 = 0 \text{ sau}$$

$$(x+2)(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x + 16) = 0,$$

$$x_1 = -2 \text{ și } x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x + 16 = 0.$$

Împărțind prin x^2 avem:

$$x^2 + \frac{16}{x^2} - 4\left(x + \frac{4}{x}\right) + 12 = 0.$$

Punînd $x + \frac{4}{x} = y$ avem:

$x^2 + \frac{16}{x^2} = y^2 - 8$ și deci $y^2 - 4y + 4 = 0$, adică $y_{1,2} = 2$, și deci $x_2 = x_4 = 1 + i\sqrt{3}$, $x_3 = x_5 = 1 - i\sqrt{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

74. Din $x^4=-1$ deducem $x=\cos\frac{\pi(2k+1)}{4}+i\sin\frac{\pi(2k+1)}{4}$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$

$$S=\sum_{k=0}^{3}\left[\cos\frac{\pi(2k+1)n}{4}+i\sin\frac{\pi(2k+1)n}{4}\right]=\cos\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{3n\pi}{4}+$$

$$+\cos\frac{5n\pi}{4}+\cos\frac{7n\pi}{4}+i\left(\sin\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{3n\pi}{4}+\sin\frac{5n\pi}{4}+\sin\frac{7n\pi}{4}\right)=$$

$$=\cos\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{3n\pi}{4}+\cos\left(2n\pi-\frac{3n\pi}{4}\right)+\cos\left(2n\pi-\frac{n\pi}{4}\right)+$$

$$+i\left[\sin\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{3n\pi}{4}+\sin\left(2n\pi-\frac{3n\pi}{4}\right)+\sin\left(2n\pi-\frac{n\pi}{4}\right)\right]=$$

$$=\cos\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{3n\pi}{4}+\cos\frac{3n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}+i\left(\sin\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{3n\pi}{4}-\right.$$

$$\left.-\sin\frac{3n\pi}{4}-\sin\frac{n\pi}{4}\right)=2\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{3n\pi}{4}\right)=4\cos\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

75. Fie $x_1<x_2<x_3$ rădăcinile polinomului derivat:

$$P'(x)=k(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Pentru $x\in[x_1,\ x_2]$ avem $P'(x)\geqslant 0$ și deci $P(x_1)\leqslant P(x_2)$. Pentru $x\in[x_2,\ x_3]$ avem $P'(x)\leqslant 0$ și deci $P(x_3)\leqslant P(x_2)$. Fie $a=\max[P(x_1),\ P(x_3)]$ și $Q(x)=P(x)-a$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty}Q(x)=\infty$; $Q(x_1)=P(x_1)-a\leqslant 0$; $Q(x_2)=P(x_2)-a\geqslant 0$; $Q(x_3)=P(x_3)-a\leqslant 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty}Q(x)=\infty$

și deci ecuația $Q(x)=0$ are toate rădăcinile reale. Pentru $n\geqslant 5$ proprietatea nu se mai păstrează.

Exemplu: $P(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{5x^3}{3}+4x$; $P(x)=a$.

$$Q(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{5x^3}{3}+4x-a=0,\ Q'(x)=x^4-5x^2+4.$$

Rădăcinile polinomului derivat sînt ± 1, ± 2. Șirul lui *Rolle* are forma:

$-\infty$	-2	-1	1	2	∞
$-\infty$	$\frac{-16}{15}-a$	$\frac{-38}{15}-a$	$\frac{38}{15}-a$	$\frac{16}{15}-a$	∞

Scanned with OKEN Scanner

Condițiile $\frac{-16}{5} - a \geqslant 0$; $\frac{-38}{15} - a \leqslant 0$; $\frac{38}{15} - a \geqslant 0$; $\frac{16}{15} - a \leqslant 0$ sînt contradicții și deci ecuația $P(x) = a$ nu poate avea toate rădăcinile reale pentru nici un $a \in \mathbf{R}$.

76. a) $P'(x) = 5x^4 + 15x^2 + 5$. $P'(x) = 0$ nu are rădăcini reale. Din șirul lui *Rolle* rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} P(x) = -\infty$ și $\lim\limits_{n\to\infty} P(x) = \infty$, deci ecuația $P(x) = 0$ are o singură rădăcină reală.

b) Fie $x = u + v$, $uv = -1$.

$$(u+v)^5 = u^5 + v^5 + 5uv(u^3 + v^3) + 10u^2v^2(u+v) =$$
$$= u^5 + v^5 - 5(u^3 + v^3) + 10(u+v)$$
$$(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = u^3 + v^3 - 3(u+v).$$

Înlocuind în relația dată se obține:

$$u^5 + v^5 - 5(u^3 + v^3) + 10(u+v) + 5(u^3 + v^3) -$$
$$- 15(u+v) + 5(u+v) - 2m = 0,$$

de unde $\begin{cases} u^5 + b^5 = 2m \\ uv = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = -\frac{1}{u} \\ u^5 - \frac{1}{u^5} = 2m \end{cases}$

$$u^{10} - 2mu^5 - 1 = 0 \Leftrightarrow u^5 = m \pm \sqrt{m^2+1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow u = \sqrt[5]{m \pm \sqrt{m^2+1}}, \text{ iar}$$

$$v = \frac{-1}{u} = \frac{-1}{\sqrt[5]{m \pm \sqrt{m^2+1}}} = \sqrt[5]{m \mp \sqrt{m^2+1}}$$

deci

$$x = \sqrt[5]{m + \sqrt{m^2+1}} + \sqrt[5]{m - \sqrt{m^2+1}}.$$

77. Fie k rădăcină dublă comună. Este necesar ca polinomul $(x^5 + ax^2 + bx + 1) - (x^5 + mx^2 + nx + 1)$ să aibă pe k rădăcină dublă deci ecuația $x^2(a-m) + x(b-n) = 0$ are pe k rădăcină dublă. Cum $k \neq 0$ rezultă ca singură posibilitate $a = m$ și $b = n$ adică ecuațiile inițiale coincid.

Scanned with OKEN Scanner

78. Deoarece $x = 0$ nu este rădăcină, împărțim prin x^3 și ecuația se scrie: $\left[\frac{(x-1)^2}{x}\right]^3 + \left[\frac{(x-1)^2}{x}\right]^2 - 32 = 0.$

Notăm $\frac{(x-1)^2}{x} = y$ și avem: $y^3 + 6y^2 - 32 = 0$ adică $(y-2)(y+4)^2 = 0$ și deci $\left[\frac{(x-1)^2 - 2x}{x}\right]\left[\frac{(x-1)^2}{x} + 4\right]^2 = 0.$

Ecuația are forma: $(x^2 - 4x + 1)^2(x+1)^4 = 0.$

Soluțiile sînt $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ și $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = -1.$

79. 1) $P(1-x) = [(1-x)^2 - (1-x) + 1]^3 -$

$-a(1-x)^2(1-x-1)^2 = (1-x+x^2)^3 - ax^2(x-1)^2 = P(x).$

$$x^6 P\left(\frac{1}{x}\right) = x^6\left[\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1\right)^3 - a\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2\right] =$$

$$= x^6\left[\frac{(1-x+x^2)^3}{x^6} - a\frac{(1-x)^2}{x^4}\right] = (x^2 - x + 1)^3 -$$

$$- ax^2(x-1)^2 = P(x).$$

2) Dacă x_1 este rădăcină avem evident $x_1 \neq 0$, $x_1 \neq 1$. Din $P(x_1) = 0$ și $P(x) = P(1-x)$ deducem $P(1-x_1) = 0$ și deci $x_2 = 1 - x_1$. Cum $P(x) = x^6 P\left(\frac{1}{x}\right)$ rezultă $P\left(\frac{1}{x_1}\right) = 0$ și $P\left(\frac{1}{x_2}\right) = 0$ adică $x_3 = \frac{1}{x_1}$, $x_4 = \frac{1}{x_2} = \frac{1}{1-x_1}$.

În sfîrșit, rezultă $P(1-x_3) = 0$ și deci $x_5 = 1 - x_3 = 1 - \frac{1}{x_1}$ și $P(1-x_4) = 0$ adică

$$x_6 = 1 - x_4 = 1 - \frac{1}{1-x_1} = \frac{-x_1}{1-x_1}.$$

În cazul $a = \frac{27}{4}$ se obțin rădăcinile duble $\frac{1}{2}$, 2, -1.

80. Polinomul $E(u)$ are gradul cel mult $n-1$.

$$E(a_1) = 1$$
$$E(a_2) = 1$$
$$\vdots$$
$$E(a_n) = 1$$

din $P(x) = E(x) - 1$ de grad cel mult $n-1$ are n rădăcini deci $P(x)$ este identic 0, adică $E(u) = 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

81. Din ultimele două relații ale lui *Viète* rezultă:

$$\sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{x_i} = 2n \text{ și } x_1 x_2 \dots x_{2n} = 1.$$

Între media geometrică G a unor numere pozitive și media lor armonică H există inegalitatea $G \geqslant H$ (egalitate dacă numerele sînt egale).

În cazul nostru $G = \sqrt[2n]{x_1 x_2 \dots x_{2n}} = 1$,

$$H = \frac{2n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{2n}}} = 1$$

deci $G = H$ și deci $x_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, 2n$.

82. Ecuația nu admite rădăcinile 0 și 1. Înmulțind cu $x^3 - x^2$ avem:

$$\frac{x^3 - x^2}{(1+x^2)(1+x^3)} + \frac{x^4 - x^3}{(1+x^3)(1+x^4)} + \dots + \frac{x^{n+1} - x^{n+2}}{(1+x^{n+1})(1+x^{n+2})} = 0$$

sau

$$\frac{(1+x^3)-(1+x^2)}{(1+x^2)(1+x^3)} + \frac{(1+x^4)-(1+x^3)}{(1+x^3)(1+x^4)} + \dots + \frac{(1+x^{n+2})-(1+x^{n+1})}{(1+x^{n+1})(1+x^{n+2})} = 0$$

sau

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^3} + \frac{1}{1+x^3} - \frac{1}{1+x^4} + \dots + \frac{1}{1+x^{n+1}} - \frac{1}{1+x^{n+2}} = 0$$

și deci $\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^{n+2}} = 0$ adică $x^2(x^n - 1) = 0$.

Deoarece $x \neq 0$, $x \neq 1$ rămîne $x = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Este necesar ca numitorul să nu se anuleze și deci

$$1 + x^h \neq 0,\ h = 2, 3, \dots, n+2, \text{ adică}$$

$$1 + \cos \frac{2kh\pi}{n} + i \sin \frac{2kh\pi}{n} \neq 0, \quad h = 2, 3, \dots, n+2.$$

adică $\frac{2kh\pi}{n} \neq (2l+1)\pi$, $\forall h = 2, 3, \dots, n+2$.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru n impar avem soluțiile $x = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Pentru $n = 2^s(2t+1)$ este necesar și suficient să avem $k = M2^s$ deci $k = 2^s, 2\cdot 2^s, 3\cdot 2^s, \ldots, 2t\cdot 2^s$. Pentru $n = 2^m$ ecuația este imposibilă.

83. Vom arăta că

$$\frac{(-1)^n n!}{\prod_{i=0}^{n}(x-i)} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{C_n^i}{x-i} \quad x \neq 0, 1, \ldots, n.$$

Fie $\frac{n!}{x(x-1)\ldots(x-n)} = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x-1} + \ldots + \frac{a_n}{x-n}$. Înmulțim cu $x-k$ și facem apoi $n = k$. Obținem:

$$a_k = \frac{n!}{k(k-1)\ldots 2\cdot 1\cdot(-1)(-2)\ldots(k-n)} = \frac{(-1)^{n-k}n!}{k!(n-k)!} =$$
$$= (-1)^n(-1)^k C_n^k$$

și deci

$$\frac{(-1)^n n!}{x(x-1)\ldots(x-n)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{x-k};$$

este evident acum că ecuația dată nu are soluții.

84. Dacă $a = b$ ecuația devine $2(x-a)^n = 0$ și admite rădăcina $x = a$ cu ordinul de multiplicitate n.

Dacă $a \neq b$ ecuația se scrie $\left(\frac{x-a}{a-b}\right)^n + \left(\frac{x-b}{a-b}\right)^n = 1$.

Punînd $\frac{x-a}{a-b} = y$ avem $f(y) = y^n + (1+y)^n - 1 = 0$.

Întocmim șirul lui *Rolle* pentru $f(y)$:

$$f'(y) = ny^{n-1} + n(1+y)^{n-1} = n[y^{n-1} + (1+y)^{n-1}].$$

a) Dacă n este impar $f'(y) \neq 0$ cum $\lim_{y\to-\infty} f(y) = -\infty$ și $\lim_{y\to\infty} f(y) = +\infty$, rezultă că ecuația admite o singură rădăcină reală. Această rădăcină este $y = 0$ și deci $x = a$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Dacă n este par $f'(y)=0 \Rightarrow \left(\frac{1+y}{y}\right)^{n-1}=-1$ și deci $1+y=-y$ adică $y=-\frac{1}{2}$. Cum $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}-1<0$, șirul lui *Rolle* este

$$\begin{array}{ccccc} -\infty & & -\frac{1}{2} & & \infty \\ \hline +\infty & & - & & \infty \end{array}$$

și deci ecuația are două rădăcini reale care sînt $y_1=-1$, $y_2=0$ adică $x=b$ și $x=a$.

85. Punem $(x+\sqrt{x^2-a})^n=w$; $(x-\sqrt{x^2-a})^n=v$. Avem evident: $w+v=-b$, $wv=a^n$; w și v sînt rădăcinile ecuației $t^2+bt+a^n=0$ și deci

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a^n}}{2}\cdot \text{ Deci } x+\sqrt{x^2-a}=\sqrt[n]{t_1};$$

$$x-\sqrt{x^2-a}=\sqrt[n]{t_2}.$$

O rădăcină a ecuației este $x=\frac{\sqrt[n]{t_1}+\sqrt[n]{t_2}}{2}$ adică

$$x=\frac{\sqrt[n]{\frac{-b+\sqrt{b^2-4a^n}}{2}}+\sqrt[n]{\frac{-b-\sqrt{b^2-4a^n}}{2}}}{2}.$$

Pentru $n=3$ ecuația dată devine: $x^3-\frac{3}{4}ax+\frac{b}{8}=0$. Punînd $p=-\frac{3a}{4}$ și $q=\frac{b}{8}$ ecuația devine: $x^3+px+q=0$, iar soluția:

$$x=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

adică formula lui *Cardan* pentru rezolvarea ecuației de gradul 3.

Scanned with OKEN Scanner

86. Avem evident $x_1 = 0$ și $x^m - mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} + \ldots + P(x) = 0$. Din primele două relații ale lui *Viète* obținem:

$$\sum_{i=2}^{m+1} x_i = m \text{ și } \sum_{2 \leqslant i < j \leqslant m+1} x_i x_j = \frac{m(m-1)}{2}. \text{ Deci}$$

$$\sum_{i=2}^{m+1} x_i^2 = \left(\sum_{i=2}^{m+1} x_i \right)^2 - 2 \sum_{2 \leqslant i < j \leqslant m+1} x_i x_j = m^2 - m(m-1) = m;$$

$$\sum_{i=2}^{m+1} (x_i - 1)^2 = \sum_{i=2}^{m+1} x^2 - 2 \sum_{i=2}^{m+1} x_i + m = m - 2m + m = 0.$$

Cum rădăcinile sînt egale rezultă $x_2 = x_3 = \ldots = x_{m+1} = 1$.

87. Fie $P(x) = C_{2m}^1 x^{m-1} + C_{2m}^3 x^{m-2} + \ldots + C_{2m}^{2m-3} x + C_{2m}^{2m-1}$. E nu admite rădăcina $x = 0$ și se poate scrie astfel:

$$P(x) = \sum_{k=1}^{m} C_{2m}^{2k-1} x^{m-k} = \sum_{k-1}^{m} C_{2m}^{2k-1} (\sqrt{x})^{2m-2k} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=1}^{m} C_{2m}^{2k-1} (\sqrt{x})^{2m-(2k-1)}.$$

Dacă notăm

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=0}^{m} C_{2m}^{2k} (\sqrt{x})^{2m-2k+1},$$

se vede că

$$Q(x) + P(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} (\sqrt{x} + 1)^{2m} \text{ și}$$

$$Q(x) - P(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1)^{2m}$$

de unde rezultă că

$$P(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} [(\sqrt{x} + 1)^{2m} - (\sqrt{x} - 1)^{2m}].$$

În felul acesta rezolvarea ecuației date $P(x) = 0$ revine la a rezolva ecuația

$$(\sqrt{x} + 1)^{2m} - (\sqrt{x} - 1)^{2m} = 0,$$

Scanned with OKEN Scanner

adică

$$\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^{2m}=1 \text{ și } \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\sqrt[2m]{\cos 2k\pi+\mathrm{i}\sin 2k\pi} \text{ sau}$$

$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}=\cos\frac{k\pi}{m}+\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{m}, \text{ de unde,}$$

$$\sqrt{x}=\frac{1+\cos\frac{k\pi}{m}+\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{m}}{-1+\cos\frac{k\pi}{m}+\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{m}} \text{ sau } \sqrt{x}=\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\frac{k\pi}{2m} \text{ și deci}$$

$$x=-\mathrm{tg}^2\frac{k\pi}{2m},\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1.$$

88. $P(x)=x^n+1=(x-x_1)\ (x-x_2)\ \ldots\ (x-x_n)$

$$\frac{P'(x)}{P(x)}=\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\ldots+\frac{1}{x-x_n},$$

$$(x\neq x_i,\ \ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Cum $P(x)$ nu are rădăcini multiple

$$\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\ldots+\frac{1}{x-x_n}=0\Leftrightarrow P'(x)=0\Leftrightarrow nx^{n-1}=0.$$

Deci ecuația dată admite ca rădăcină pe 0 cu ordinul de multiplicitate $n-1$.

89. Polinomul are gradul $n+1$.

$P(-2k)=(-2k+1)(-2k+3)\ldots(-2k+2k-1)(-2k+2k+1)\ldots$
$\ldots(-2k+2n+1)=(-1)^k(2k-1)(2k-3)\ldots1\cdot1\cdot3\ldots[2(n-k)+1].$

Rezultă $(-1)^kP(-2k)>0,\ \ k=0,\ 1,\ \ldots,\ m$ și deci

$$(-1)^{k+1}(-1)^k\cdot P(-2k-2)P(-2k)>0 \text{ adică}$$

$(-1)^{2k+1}P(-2k-2)P(-2k)>0$, ceea ce înseamnă $P(-2k-2)P(-2k)<0,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$. Deci în intervalele $(-2,\ 0)$; $(-4,\ -2),\ \ldots\ (-2n,\ -2n+2)$, există cel puțin o rădăcină a lui $P(x)$, adică $P(x)$ are cel puțin n rădăcini reale. Cum gradul P este $n+1$ și numărul rădăcinilor complexe este par, rezultă că toate rădăcinile lui $P(x)$ sînt reale.

Scanned with OKEN Scanner

90. Polinomul $R(x) = P(x)\,x^n = x^{n+3} + ax^{n+2} + bx^{n+1} + cx^n$ are toate rădăcinile reale și deci polinomul derivat

$$R'(x) = (n+3)x^{n+2} + (n+2)ax^{n+1} + (n+1)bx^n + ncx^{n-1}$$

are toate rădăcinile reale.

La fel, $R^{(2)}(x)$, $R^{(3)}(x)$, ..., $R^{(n)}(x)$ au rădăcinile reale. $R^{(n)} = (n+3)(n+2)\ldots 4x^3 + a(n+2)(n+1)\ldots 3x^2 + b(n+1)m\ldots 2x + cn(n-1)\ldots 1$ și deci

$$\frac{(n+3)(n+2)\ldots 4}{n!}x^3 + a\frac{(n+2)(n+1)\ldots 3}{n!}x^2 + b\frac{(n+1)n\ldots 2}{n!} + c = 0$$

are rădăcinile reale.

Cum $\frac{(n+3)(n+2)\ldots 4}{n!} = C_{n+3}^3$; $\frac{(n+2)(n+1)\ldots 3}{n!} = C_{n+2}^2$; $\frac{(n+1)n\ldots 2}{n!} = C_{n+1}^1$ enunțul este justificat.

91. Polinomul $Q(x) = x^k P(x)$ are rădăcinile reale și deci polinomul derivat $Q'(x)$ are rădăcinile reale

$$Q(x) = a_n x^{n+k} + a_{n-1}x^{n-1+k} + \ldots + a_1 x^{1+k} + a_0 x^k;$$

$$Q'(x) = (n+k)a_n x^{n+k+1} + (n-1+k)_{n-1}x^{n-2+k} + \ldots + (k+1)a_1 x^k + ka_0 x^{k-1}.$$

Polinomul $R(x) = xQ'(x) = (n+k)a_n x^{n+k} + (n-1+k)a_{n-1}x^{n-1+k} + \ldots + (k+1)a_1 x^{k+1} + ka_0 x^k$, are rădăcinile reale și deci: $R'(x) = (n+k)^2 a_n x^{n-1+k} + (n-1+k)a_{n-1}x^{n-2+k} + \ldots + (k+1)^2 a_1 x^k + k^2 a_0 x^{k-1}$, are rădăcinile reale.

Împărțind prin x^{k-1} rezultă că:

$$Q(x) = (n+k)^2 a_n x^n + (n+k-1)^2 a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + (k+1)^2 a_1 x + k^2 a_0$$ are rădăcinile reale $(n+k=m)$.

92. Ecuația se mai scrie

$$x\left(\frac{1}{a_1 - x} + \frac{1}{a_2 - x} + \ldots + \frac{1}{a_n - x}\right) = 0.$$

Rezultă

$$x = 0 \text{ și } \frac{1}{a_1 - x} + \frac{1}{a_2 - x} + \ldots + \frac{1}{a_n - x} = 0.$$

Punînd $P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$. Ecuația $P(x) = 0$ are evident toate rădăcinile reale. Rezultă că

Scanned with OKEN Scanner

rădăcinile ecuației $P'(x) = 0$ sînt toate reale. Cum ecuația $\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \ldots + \frac{1}{x-a_n} = 0$ dă rădăcinile lui $P'(x) = 0$ care nu sînt rădăcini și pentru $P(x) = 0$ rezultă că ecuația $\frac{1}{a_1-x} + \frac{1}{a_2-x} + \ldots + \frac{1}{a_n-x} = 0$ are toate rădăcinile reale.

93. Punem $f(x) = x^n + ax + b$. $f'(x) = nx^{n-1} + a$. Rădăcinile derivatei sînt $x_{1,2} = \pm \sqrt[n-1]{-\frac{a}{n}}$. Cum $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, este necesar și suficient să avem:

$a \leqslant 0$; $f(x_1) \geqslant 0$; $f(x_2) \leqslant 0$ (C) $f(x_1) = b - \frac{a(n-1)}{n} \sqrt[n-1]{-\frac{a}{n}}$, $f(x_2) = b + \frac{a(n-1)}{n} \sqrt[n-1]{-\frac{a}{n}}$ și condiția (C) se scrie $a \leqslant 0$, $\frac{a(n-1)}{n} \sqrt[n-1]{-\frac{a}{n}} \leqslant b \leqslant \frac{-a(n-1)}{n} \sqrt[n-1]{-\frac{a}{n}}$ adică, $a \leqslant 0$, $|b| \leqslant \frac{-a(n-1)}{n} \sqrt[n-1]{-\frac{a}{n}}$ — sau $a \geqslant 0$, $b^{n-1} + \frac{a^n(n-1)^{n-1}}{n^n} \leqslant 0$ adică $\left(\frac{b}{n-1}\right)^{n-1} + \left(\frac{a}{n}\right)^n \leqslant 0$ (C').

Condiția $a \leqslant 0$ rezultă din condiția (C') deoarece $\left(\frac{b}{n-1}\right)^{n-1} \geqslant 0$.

94. a) Din relațiile lui *Euler* avem:

$$S_1 + a_1 = 0$$
$$S_2 + a_1S_1 + 2a_2 = 0$$
$$S_3 + a_1S + a_2S_1 + 3a_3 = 0$$
$$S_4 + a_1S_3 + a_2S_2 + a_3S_1 + 4a_4 = 0.$$

Avem succesiv: $S_1 = -a_1 = 3$; $S_2 = 9 - 2\frac{7}{2} = 2$; $S_3 = 3 \cdot 2 - \frac{7}{2} \cdot 3 + 3\frac{11}{6} = 1$; $S_4 = 3 \cdot 1 - \frac{7}{2} \cdot 2 + \frac{11}{6} \cdot 3 - \frac{4}{8} = 1$.

b) Avem inegalitatea: $n(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) \geqslant (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2$ și deci $nS_2 \geqslant S_1^2$ adică $2n \geqslant 9$ deci $n \geqslant 4{,}5$ și cum $n \geqslant N$ rezultă $n \geqslant 5$.

Scanned with OKEN Scanner

95. x_i sînt rădăcini și pentru ecuația $x^{n+1} - a^{n+1} = 0$. Avem $x^{n+1} = a^{n+1}(\cos 2i\pi + i \sin 2i\pi)$ și deci $x_i = a\left(\cos \frac{2i\pi}{n+1} + i \sin \frac{2i\pi}{n+1}\right)$ unde $i = 0, 1, 2, \ldots, n$; pentru $i = 0$ se obține $x_0 = a$ care nu verifică ecuația dată. Avem deci $x_i = a\left(\cos \frac{2i\pi}{n+1} + i \sin \frac{2i\pi}{n+1}\right)$ $i = 1, 2, \ldots, n$. Relația $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x}{a_i}\right)^k = n$ devine $\sum_{i=1}^{n} \left(\cos \frac{2ki\pi}{n+1} + i \sin \frac{2ki\pi}{n+1}\right) = n$, și deci $\sum_{i=1}^{n} \cos \frac{2ki\pi}{n+1} = n$ și $\sum_{i=1}^{n} \frac{2ki\pi}{n+1} = 0$. Avem deci $\sum_{i=1}^{n} \left(\cos \frac{2ki\pi}{n+1} - 1\right) = 0$ și cum $\cos \alpha \leqslant 1$ rezultă: $\cos \frac{2ki\pi}{n+1} = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, și deci $\frac{2ki\pi}{n+1} = 2l_i\pi$ adică $k = \frac{l_i(n+1)}{i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Pentru $i = 1$ obținem $k = l_1 (n + 1)$, condiție necesară și suficientă pentru ca $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{a}\right)^k = n$.

96. Din relațiile lui *Viète* avem:

$$\sum \prod_{i=1}^{k} x_i = (-1)^k \frac{a_k}{a_0}$$

$$\sum \prod_{i=1}^{n-k} x_i = (-1)^{n-k} \frac{a_{n-k}}{a_0}$$

$$\sum \prod_{i=1}^{n} x_i = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

Avem evident $a_0, a_n \neq 0$.

$$\frac{\sum x_1 x_2 \ldots x_{n-k}}{x_1 x_2 \ldots x_n} = \sum \frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_k} \text{ și deci}$$

$$\sum \frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_k} = \frac{(-1)^{n-k} \cdot \frac{a_{n-k}}{a_0}}{(-1)^n \frac{a_n}{a_0}} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_0}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Folosind inegalitatea dintre media aritmetică și armonică avem: $\sum x_1x_2 \dots x_k \cdot \sum \frac{1}{x_1x_1 \dots x_h} \geqslant (C_n^k)^2$ deoarece în fiecare sumă avem C_n^k termeni. Rezultă deci $\frac{a_ka_{n-k}}{a_0a_n} \geqslant (C_n^k)^2$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. Avem dar $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_ka_{n-k}}{a_0a_n} \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} (C_n^k)^2$.

Dar $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$ și deci

$$\sum_{k=1}^{n-1} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n - 2.$$

În concluzie: $\frac{\sum_{k=1}^{n-1} a_ka_{n-k}}{a_0a_n} \geqslant C_{2n}^n - 2.$

97. La problema 96 s-a arătat că: $\frac{a_ka_{n-k}}{a_0a_n} \geqslant (C_n^k)^2$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Înmulțind aceste relații găsim:

$$\frac{a_1^2a_2^2 \dots a_{n-1}^2}{a_0^{n-1}a_n^{n-1}} \geqslant (C_n^1 C_n^2 \dots C_n^{n-1})^2 \text{ sau}$$

$$\frac{a_0^2a_1^2 \dots a_{n-1}^2a_n^2}{(a_0a_n)^{n+1}} \geqslant \left(\frac{n}{1} \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \dots \frac{n(n-1) \dots 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n-1}\right)^2$$

și deci $\frac{|a_0a_1 \dots a_n|}{|a_0a|^{\frac{n+1}{2}}} n^{n-1}(n-1)^{n-2} \dots 2^{-n+3} \cdot 1^{-n+1}$.

98. Din $E_k = 1$; $E_{k+1} = 1$; $E_{k+2} = 1$ deducem $E_{k+2} - 2E_{k+1} + E_k = 0$, adică

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k(x_i - 1)^2 = 0. \qquad (1)$$

Dacă k este par atunci $x_i = 0$ sau $x_i = 1$, $\forall\ i = 1, 2, \dots, n$.

Știind că $x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k = 1$ rezultă că $\exists\ h \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel că:

$$x_n = 1, \quad x_i = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} - \{h\}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă k este impar atunci $k+1$ este par și din $x_1^{k+1}+x_2^{k+1}+\ldots+x_n^{k+1}=1$ (2) deducem $|x_i|\leqslant 1$, $i=1,2,\ldots,n$.

Din $E_{k+1}=1$ și $E_{k+2}=1$ deducem $E_{k+1}-E_{k+2}=0$ adică $\sum_{i=1}^{n} x_i^{k+1}(1-x_i)=0$ și cum $x_i^{k+1}\geqslant 0$ și $1-x_i\geqslant 0$ rezultă că $x_i=0$ sau $x_1=1$, $\forall\, i=1,2,\ldots,n$, care împreună cu (2) ne asigură că $x_h=1$ și $x_i=0$, $i\in\{1,2,\ldots,n\}-\{h\}$.

Așadar, în ambele cazuri rădăcinile sînt $0, 0, \ldots, 0, 1$ și deci $a_1=-1$, $a_2=a_3=\ldots=a_n=0$. Evident $E_k=1$, $\forall\, k\in N^*$.

99. Dacă rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt reale atunci avem inegalitatea lui *Cauchy*

$$n(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)\geqslant (x_1+x_2+\ldots+x_n)^2. \qquad (1)$$

Din relațiile lui *Viète* rezultă. $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=$ $=(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j=\left(\frac{a_1}{a_0}\right)-2\frac{a_2}{a_0}=$ $=\frac{a_1^2-2a_0a_2}{a_0^2}$ și inegalitatea (1) devine $\frac{n(a_1^2-2a_0a_2)}{a_0^2}\geqslant\frac{a_1^2}{a_0^2}$ adică $(n-1)a_1^2\geqslant 2na_0a_2$ și deci $P_1\to P_2$. Dacă $n=2$ ecuația se scrie $a_0x^2+a_1x+a_2=0$, iar P_2: $a_1^2-4a_0a_2\geqslant 0$ și deci ecuația are rădăcinile reale. Așadar, pentru $n=2$, $P_2\to P_1$. Vom arăta că pentru $n>2$, $P_2\not\to P_1$. Considerăm ecuația $x^n+1=0$. Cum $a_0=1$, $a_1=0$, $a_2=0$, $(n>2)$, inegalitatea este verificată însă ecuația nu are toate rădăcinile reale.

100. Dacă există $x_i=0$, atunci $\bar{x}_i=0$ și deci $S=0$. Dacă $x_i\neq 0$.

$$S=\sum_{k=1}^{n} x_1x_2\ldots x_{k-1}x_kx_{k+1}\ldots x_n\cdot\frac{\bar{x}_k}{x_k}=x_1x_2\ldots x_n\sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{x}_k}{x_k}.$$

Din relațiile lui *Viète* rezultă $x_1x_2\ldots x_n\in R$. Dacă $x_k\in\mathbf{R}$ atunci $\bar{x}_k\in\mathbf{R}$. Rămîne de arătat că $S'=\sum\frac{\bar{x}_k}{x_k}$ unde $x_k\in C-\mathbf{R}$ este reală.

Polinomul admițînd rădăcina $x_k\in C-\mathbf{R}$ admite și rădăcina $x_j=\bar{x}_k$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem $\frac{\bar{x}_k}{x_k}+\frac{\bar{x}_j}{x_j}=\frac{\bar{x}_k}{x_k}+\frac{\bar{x}_k}{\bar{x}_k}=\frac{\bar{x}_k}{x_k}+\frac{x_k}{\bar{x}_k}=\frac{(\bar{x}_k)^2+(x_k)^2}{x_k\bar{x}_k}$ și deci $S'=\sum\frac{(\bar{x}_k)^2+(x_k)^2}{x_kx_k}$. Dar $(\bar{x}_k)^2+x_k^2\in R$ și $x_k\bar{x}_k=|x_k|^2\in\mathbf{R}$ și deci $S'\in\mathbf{R}$.

101. Inegalitatea din enunț se scrie:

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i-$$

$$-\sqrt{\left[\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2-\sum x_i^2\right]\cdot\left[\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right]}\quad\text{sau}$$

$$\sqrt{\left[\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right]\left[\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right]}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i.$$

Cum ambii membri sînt pozitivi ridicăm la pătrat și după reduceri obținem inegalitatea echivalentă:

$$\sum_{i=1}^{n}x^2\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2+\sum_{i=1}^{n}y^2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\geqslant 2\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_iy_i.\qquad(1)$$

Aplicînd inegalitatea mediilor și apoi inegalitatea lui *Cauchy-Buneakovski*, avem:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2\,(\sum y_i)^2+\sum_{i=1}^{n}y_i^2\,(\sum x_i)^2\geqslant$$

$$\geqslant 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2}\geqslant$$

$$\geqslant 2\sqrt{(\sum x_iy_i)^2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2}=2\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

adică inegalitatea (1).

102. Avem $f(x)=\frac{a_0}{x}+\frac{a_1}{x+1}+\ldots+\frac{a_n}{x+n}=$

$=\frac{Q(x)}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$ unde $Q(x)$ este un polinom de

Scanned with OKEN Scanner

grad cel mult n. Cum $Q(x)$ are $n+1$ rădăcini rezultă $Q(x) \equiv 0$. Dar $Q(x) = a_0(x+1)(x+2)\ldots(x+n) + a_1x(x+2)\ldots(x+n) + \ldots + a_nx(x+1)\ldots(x+n-1)$.

Din $Q(0) = 0$ rezultă $n!\,a_0 = 0$ și deci $a_0 = 0$. Din $Q(-1) = 0$ rezultă $-a_1(n-1)! = 0$ și deci $a_1 = 0$. Din $Q(-2) = 0$, $Q(-3) = 0$, ..., $Q(-n) = 0$ deducem $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$.

103. Rezultă imediat $P(y)y^{k-1} \geqslant 0$ pentru orice $y \in (0, 1]$, $k > 0$ și deci $\int_\varepsilon^1 P(y)x^{k-1}\,dy \geqslant 0$ pentru orice $\varepsilon > 0$ adică

$$S(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i y^{k+1}}{k+i}\Big|_\varepsilon^1 = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{k+i} - \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i \varepsilon^{k+i}}{k+i} \geqslant 0 \text{ pentru } k > 0$$

sau $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} S(\varepsilon) = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{a_i}{k+i} \geqslant 0$ pent u $k > 0$.

Notînd $k = x$ rezultă $\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{a_i}{x+i} \geqslant 0$ pentru oirce $x > 0$.

104. $P(1) = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} - \frac{n-1}{a_1a_n}$.

Fie r rația progresiei

$$rP(1) = \frac{r}{a_1a_2} + \frac{r}{a_2a_3} + \ldots + \frac{r}{a_{n-1}a_n} - \frac{(n-1)r}{a_1a_n} =$$

$$= \frac{a_2 - a_1}{a_1a_2} + \frac{a_3 - a_2}{a_2a_3} + \ldots + \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}a_n} - \frac{a_n - a_1}{a_1a_n} =$$

$$= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_n} = 0.$$

Vom arăta că $P'(1) \neq 0$.

$$P'(x) = \frac{(n-1)x^{n-2}}{a_1a_2} + \frac{(n-2)x^{n-3}}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}a_n}$$

$$rP'(1) = \frac{(n-1)r}{a_1a_2} + \frac{(n-1)r}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}a_n} =$$

$$= \frac{(n-1)(a_2 - a_1)}{a_1a_2} + \frac{(n-2)(a_3 - a_2)}{a_2a_3} + \ldots + \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}a_n} =$$

$$= (n-1)\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + (n-2)\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) + \ldots +$$

$$+ 2\left(\frac{1}{a_{n-2}} - \frac{1}{a_{n-1}}\right) + \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right) = n \cdot \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} - \ldots - \frac{1}{a_n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar media armonică a unor numere pozitive (nu toate egale) este mai mare decît numărul cel mai mic.

Deci $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} > \frac{1}{a_1}$ adică $n \cdot \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} - \ldots - \frac{1}{a_n} > 0$.

Cum $rP'(1) > 0$ rezultă $P'(1) \neq 0$ și deci $x = 1$ nu este rădăcină dublă.

105. Fie $P(x) = a(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$ și $Q(x) = b(x - b_1)(x - b_2) \ldots (x - b_m)$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - a_i} = \frac{P'(x)}{P(x)} \text{ pentru } n \neq a_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{x - b_i} = \frac{Q'(x)}{Q(x)} \text{ pentru } x \neq b_j,\ j = 1, 2, \ldots, m, \text{ și deci}$$

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{Q'(x)}{Q(x)},\ x \neq a_i,\ x \neq b_j.$$

Integrăm această ecuație pentru $x > \max_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ j=1,2,\ldots,m}} (a_i, b_j)$ și avem $\ln P(x) = \ln kQ(x)$ și deci $P(x) = kQ(x)$ pentru o infinitate de valori ale lui x și deci $P(x) = kQ(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Enunțul este acum justificat.

106. a) Ecuația $x^n - 1 = 0$ (1) are rădăcinile $x_1 = w$, $x_2 = w^2, \ldots, x_n = w^n$ deci $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{a - bx_i}$.

Ecuația care are ca rădăcini pe $y_i = \frac{a}{a - bx_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ se obține eliminînd pe x între $y = \frac{a}{a - bx}$ și (1). Avem $x = \frac{a}{b}\left(\frac{y-1}{y}\right)$, $b \neq 0$. Deci $\frac{a^n}{b^n}\left(\frac{y-1}{y}\right)^n - 1 = 0$ sau $a^n(y-1)^n - b^n y^n = 0$ sau $y^n(a^n - b^n) - C_n^1 a^n y^{n-1} + \ldots = 0$ $S = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \frac{na^n}{a^n - b^n}$. Pentru $b = 0$ se obține $S = n$.

b) $S - n = \frac{na^n}{a^n - b^n} - n = \frac{nb^n}{a^n - b^n} = \frac{n}{\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}$.

Dacă $a > b > 0$ atunci $\frac{a}{b} > 1$ și deci $\left(\frac{a}{b}\right)^n > 1$ adică $S - n > r$.

107. $s_1 + s_2 + \ldots + s_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i + x_i^2 + \ldots + x_i^k) =$

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i (1 - x_i^k)}{1 - x_i}$.

Pentru $k \to \infty$, $x_i^k \to 0$ și deci $l = \lim_{k \to \infty} (s_1 + s_2 + \ldots + s_k) =$

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 - x_i} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i - 1} - n$.

Notăm $y_i = \frac{1}{x_i - 1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ și formăm ecuația cu rădăcinile $y_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ punînd $y = \frac{1}{x - 1}$ adică $x = 1 + \frac{1}{y}$, ecuația devine:

$$\left(1 + \frac{1}{y}\right)^n + a_1 \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\left(1 + \frac{1}{y}\right) + a_n = 0,$$

adică

$$y^n(1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + y^{n-1}[n + (n-1)a_1 + \ldots + a_{n-1}] + \ldots = 0$$

și deci $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = -\frac{n + (n-1)a_1 + \ldots + a_{n-1}}{1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$.

$$l = \frac{n + (n-1)a_1 + \ldots + a_{n-1}}{1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n} - n =$$

$$= \frac{-a_1 - 2a_2 - \ldots - (n-1)a_{n-1} - a_n}{1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$

108. Fie x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ rădăcinile polinomului. Pentru $x = x_i$ inegalitatea este evidentă.

Pentru $x \neq x_i$ $\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \ldots + \frac{1}{x - x_n}$

și deci $\left[\frac{P'(x)}{P(x)}\right]' = -\frac{1}{(x - x_1)^2} - \frac{1}{(x - x_2)^2} - \ldots - \frac{1}{(x - x_n)^2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Punînd $\frac{1}{x-x_1}=a_1, \frac{1}{x-x_2}=a_2, \ldots, \frac{1}{x-x_n}=a_n$, avem:

$$P'(x)=(a_1+a_2+\ldots+a_n)\,P(x).$$

$\frac{P''(x)P(x)-[P'(x)]^2}{P^2(x)}=-(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)$ sau încă

$$\frac{P''(x)\,P(x)-(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2\,P^2(x)}{P^2(x)}=-(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2),$$

și deci $P''(x)=P(x)\,[(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2-(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)]$.

Inegalitatea de demonstrat devine:

$$P^2(x)[(n-1)\,(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2-n(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2+n(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)]\geqslant 0$$

adică $P^2(x)[n(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)-(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2]\geqslant 0$.

Inegalitatea $n(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)\geqslant(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2$ rezultă din inegalitatea *Cauchy-Buneakovski:*

$$(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)\,(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)\geqslant$$

$\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2$, punînd $b_1=b_2=\ldots=b_n=1$.

109. a) Avem: $|P(x)|\geqslant|x^n|-|a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_0|$.

Pentru $|x|\geqslant 1$ avem $|a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_0|\leqslant|a_{n-1}|\,|x^{n-1}|+|a_{n-2}|\,|x^{n-2}|+\ldots+|a_0|\leqslant|x|^{n-1}\cdot M$. Rezultă:

$$P(x)\geqslant|x^n|-|x^{n-1}|\cdot M\geqslant|x|^{n-1}(|x|-M).$$

Pentru $|x|>M>1$ avem $|P(x)|>M^{n-1}(M-M)=0$, și deci ecuația $P(x)=0$ nu are rădăcini pentru $|x|>M$, adică rădăcinile reale sînt cuprinse în intervalul $[-M, M]$. Pentru $x>M$ polinomul are semn constant și cum $\lim\limits_{x\to\infty}P(x)=\infty$ rezultă pentru $x>M$, $P(x)>0$.

b) Pentru $x<-M$ polinomul are semn constant. Deoarece $(-1)^n\lim P(x)=(-1)^n(-1)^n\cdot\infty=\infty$, rezultă $(-1)^nP(x)>0$ pentru $x<-M$.

110. Din condiția inițială rezultă
$a_0 > 0,\ a_0 > -a_1,\ a_0 + a_2 > -a_1,\ a_0 + a_2 > -a_1 - a_3,\ \ldots$
și deci

$$(1)\qquad \begin{aligned} &a_0 > 0\\ &a_0 + a_1 > 0\\ &a_0 + a_1 + a_2 > 0\\ &a_1 + a + a_2 + a_3 > 0\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_0 + a_1 + a_2 \ldots + a_n > 0 \end{aligned}$$

Este cunoscută inegalitatea lui *Abel*: Dacă $b_0 \geqslant b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n > 0$ și dacă avem inegalitățile (1) atunci $a_0b_0 + a_1b_1 + \ldots + a_nb_n > 0$.

Punînd $x \in (0,\ 1]$ avem $1 \geqslant x \geqslant x^2 \geqslant \ldots \geqslant x^n > 0$ și deci

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n > 0 \text{ adică } P(x) > 0.$$

Pentru $x = 0$ avem $P(0) = a_0 > 0$ și deci $P(x) > 0$, $\forall x \in [0,\ 1]$.

Tot din condiția inițială rezultă $a_0 > 0,\ a_0 > a_1,\ a_0 + a_2 > a_1,\ a_0 + a_2 > a_1 + a_3 \ldots$ și deci

$$(2)\qquad \begin{aligned} &a_0 > 0\\ &a_0 - a_1 > 0\\ &a_0 - a_1 + a_2 > 0\\ &a_0 - a_1 + a_2 - a_3 > 0\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Cum pentru $x \in (0,\ 1]$ avem $1 \geqslant x \geqslant x^2 \geqslant \ldots \geqslant x^n$ rezultă deci

$$a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \ldots > 0 \text{ adică } P(-x) > 0$$

și cum $y = -x \in [-1,\ 0)$ rezultă $P(y) > 0$ pentru $y \in [-1,\ 0)$.

În concluzie, $P(x) > 0,\ \forall x \in [-1,\ 1]$ și deci ecuația $P(x) = 0$ nu are soluții pentru $x \in [-1,\ 1]$.

111. Fie $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ unde a_i este 0 sau 1. Avem $P(0) = a_0 \neq 0$ și deci $a_0 = 1$. Deoarece pentru $|x| < 1;\ \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} + \ldots$ rezultă

$$\frac{1}{1-x} - 2P(x) = -1 + (1 - 2a_1)x + (1 - 2a_2)x^2 + \ldots + (1 - 2a_n)x + x^{n+1} + \ldots \text{ unde } |1 - 2a_i| = 1,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Scanned with OKEN Scanner

Așadar,

$$\left|\frac{1}{1-x}-2P(x)+1\right|\leqslant|x|+|x^2|+\ldots+|x^n|+\ldots=\frac{|x|}{1-|x|}$$

$$|2P(x)|=\left|\left(1+\frac{1}{1-x}\right)-\left(\frac{1}{1-x}-2P(x)+1\right)\right|\geqslant$$

$$\geqslant\left|1+\frac{1}{1-x}\right|-\left|\frac{1}{1-x}-2P(x)+1\right|\geqslant$$

$$\geqslant\left|1+\frac{1}{1-x}\right|-\frac{|x|}{1-|x|}=1+\frac{1}{1-x}-\frac{|x|}{1-|x|}$$

deoarece $-1<x<1$ și deci

$$|2P(x)|\geqslant 1+\frac{1}{1+|x|}-\frac{x}{1-|x|}=\frac{2(1-|x|-|x|^2)}{1-|x|^2}$$

pentru $|x|<1$.

Dacă x_0 este o rădăcină $|x_0|<1$ atunci

$$0=|2P(x_0)|\geqslant\frac{2(1-|x_0|-|x_0|^2)}{1-x_0^2}\quad\text{și deci}$$

$$|x_0|^2+|x_0|-1\geqslant 0\ \text{adică}\ |x_0|\geqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Așadar, P nu are rădăcini în intervalul

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

112. Avem $P(0)=0$ și $P(x_0)=0$. Din teorema lui *Rolle* rezultă că există $c\in(0,\ x_0)$ astfel încît $P'(c)=0$.

113. Aplicînd teorema lui *Lagrange* funcției $P:[0,1]\to\mathbf{R}$, avem: $P(1)-P(0)=P'(\xi)$ unde $0<\xi<1$.

Dar $P(1)-P(0)=a_0+a_1+\ldots+a_{n-1}+a_n-a_n=0$ deci $P'(\xi)=0$.

114. Avem $\int_0^1 P(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k x^{n-k+1}}{n-k+1}\Big|_0^1=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{n-k+1}$

și $P(1)=\sum_{k=0}^{n}a_k$. Condiția se scrie: $P(1)=C\int_0^1 P(x)\mathrm{d}x$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $P(1) = 0$ rezultă $\int_0^1 P(x)dx = 0$. Dar din formula de medie rezultă $0 = \int_0^1 P(x)\,dx = P(a)$ cu $a \in (0, 1)$. Dacă $P(1) \neq 0$ atunci $P(1) = CP(a)$ și deci $P(1) \cdot P(a) < 0$ adică P are cel puțin o rădăcină în intervalul $(a, 1) \subset (0, 1)$.

115. Ecuația se scrie $g(x) = K\frac{Q(x)}{P(x)} - 1 = 0$, $Q \not\equiv 0$. Avem $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{Q(x)}{P(x)} = a$ (finit). Funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ are punctele de extrem local (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, k$.

Fie $\frac{1}{N} = \max(|a|, |y_1|, \ldots, |y_k|)$. $|Kf(x)| \leqslant |K|\frac{1}{N} < 1$ și deci $g(x) = Kf(x) - 1 < 0$, adică ecuația $g(x) = 0$ nu are soluție. Pentru $Q \equiv 0$ problema este banală.

116. Fie $Q(n) = (x - a)P(x)$. Q având coeficienți întregi rezultă că $Q(k) \in Z$, $\forall k \in Z$. Cum P nu are rădăcini întregi rezultă că nici Q nu are rădăcini întregi și deci $|Q(k)| \geqslant 1$ pentru $k \in Z$. Prin urmare $|Q(n)| \geqslant 1$, adică $|n - a|\,|P(n)| \geqslant 1$. Cum $a < n < a + 1$ avem $0 < |n - a| < 1$ și deci $|P(n)| > 1$.

117. Fie $Q(x) = (x-a)(x-b)P(x) = (x-a)(x-b)(x^n + ax^{n-1} + \ldots + a^n + b(x^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + b^{n-1})) = (x-b)(x^{n+1} - a^{n+1}) + (x-a)b(x^n - b^n) = x^{n+2} - abx^n - x(a^{n+1} + b^{n+1}) + ab(a^n + b^n)$. Polinomul Q are rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n, a, b$.

Punem $T_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k + a^n + b^n$, și avem relațiile lui *Euler*

$$T_1 = 0 \Rightarrow T_1 = 0$$
$$T_2 - 2ab = 0 \Rightarrow T_2 = 2ab$$
$$T_3 - T_1 \cdot 2ab = 0 \Rightarrow T_3 = 0$$
$$T_4 - T_2 \cdot 2ab = 0 \Rightarrow T_4 = (2ab)^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$T_n - T_{n-2}\,2ab = 0 \Rightarrow T_n = 2ab \cdot T_n$$

Cum $S_k = T_k - a^k - b^k$, avem:

$T_k = -a^k - b^k$; k impar $k \leqslant n$

$T_k = (2ab)^{k/2} - a^k - b^k$; k par $k \leqslant n$.

Scanned with OKEN Scanner

118. Fie $P(x) = x^k Q(x)$, $Q(0) \neq 0$ și $P^{(h)}(x) = x^k R(x)$, $R(0) \neq 0$ $P'(x)$, $P''(x)$, ..., $P^{(h)}$ admit pe 0 rădăcină cu ordinele de multiplicitate $k-1, k-2, \ldots, 0$. Deci $h \geq k+1$. $P^{(h)}(x)$ are gradul $n-h$. Cum $P^{(h)} = x^k R(x)$ rezultă $n-h \geq k$ adică $n \geq h+k$ și deci $n \geq 2k+1$ adică $k \leq \frac{n-1}{2}$. Condiția necesară $k \leq \frac{n-1}{2}$ este și suficientă. Într-adevăr, fie $P(x) = x^n - x^k$ care admite pe 0 ca rădăcină cu ordinul de multiplicitate k. De asemenea $P^{(n-k)}(x) = (x^n)^{(n-k)} - (x^k)^{(n-k)} = n(n-1) \ldots (k+1)x^k$ admite pe 0 ca rădăcină cu ordinul de multiplicitate k.

119. Fie $R(x) = P(x) - Q(x)$. Avem: $R(a)\,R(b) = [P(a) - Q(a)][P(b) - Q(b)] = [P(a) - P(b)][P(b) - P(a)] = -[P(a) - P(b)]^2 \leq 0$, și deci R are cel puțin o rădăcină în intervalul $[a, b]$, adică ecuația $P(x) = Q(x)$ are cel puțin o rădăcină în intervalul $[a, b]$.

120. Ecuația se scrie sub forma: $g(x) = x - k\frac{Q(x)}{P(x)} = 0$.

Punem $f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$, $f'(x) = \frac{Q'(x)P(x) - P'(x)Q(x)}{P^2(x)}$.

Deoarece la numărător avem un polinom de grad cel mult $2n-1$, iar la numitor un polinom de grad $2n$ care nu se anulează (grad $P = n$) rezultă că există N astfel ca

$$|f'(x)| < \frac{1}{N}, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Din $g(x) = x - kf(x)$ deducem $g'(x) = 1 - kf'(x) > 0$, și cum $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$ (deoarece $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ este finită) deducem că ecuația $g(x) = 0$ are o singură rădăcină reală.

121. Fie $f(x) = P'(x)\,Q(x) + P(x)\,Q'(x)$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ și a și b rădăcinile comune. Avem $f(a) = 0$, $f(b) = 0$ și deci din teorema lui *Rolle* $c \in (a, b)$ astfel ca $f'(c) = 0$ adică $P''(c)\,Q(c) + 2P'(c)\,Q'(c) + P(c)\,Q''(c) = 0$ și deci ecuația considerată are rădăcină.

Scanned with OKEN Scanner

122. Din $x_i \leqslant M$ deducem $M - x_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ și deci $x - x_i > 0$ pentru $x > M$. Din inegalitatea mediilor aritmetică și armonică a numerelor strict pozitive avem:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x - x_i)}{n} \geqslant \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x - x_i} \text{ pentru } x > M \text{ și deci}$$

$$\left(nx - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i} \geqslant n^2.$$

Dar $\sum_{i=1}^{n} x_i = -a_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i} = \frac{P'(x)}{P(x)}$

și deci $(nx + a_1)\frac{P'(x)}{P(x)} \geqslant n^2$. Dar pentru $x > M$, $P(x) > 0$ și deci $(nx + a_1) P'(x) \geqslant n^2 P(x)$.

123. Fie $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$. Pentru $x = x_i$ inegalitatea devine: $0 \leqslant x_i[P'(x_i)]^2$ ceea ce este adevărat deoarece $x_i \geqslant 0$.

Dacă $x \neq x_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $P'(x) = P(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}$ și

$$P''(x) = P'(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i} - P(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x - x_i)^2} =$$

$$= P(x) \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x - x_i)^2}\right]$$

și inegalitatea de demonstrat devine:

$$xP^2(x) \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x - x_i)^2}\right] \leqslant$$

$$\leqslant P^2(x) \left[x\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}\right] \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i} -$$

$$- x \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x - x_i)^2} \leqslant 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{-x_i}{(x - x_i)^2} \leqslant 0$$

ceea ce este adevărat pentru că $x_i \geqslant 0$.

Scanned with OKEN Scanner

124. Vom demonstra o propoziție mai generală și anume că polinomul H, $H(x) = P(x) + aP'(x) + \ldots + a^n P^{(n)}_{(x)}$ nu are rădăcini reale.

Pentru $a = 0$, $H(x) = P(x)$ și deci propoziție este adevărată. Pentru $a \neq 0$ avem: $H'(x) = P'(x) + aP''(x) + \ldots + a^{n-1} P^{(n)}_{(x)}$ și deci $H(x) - aH'(x) = P(x)$ sau

$$-e^{-\frac{x}{a}} H(x) + aH'(x)\, e^{-\frac{x}{a}} = -e^{-\frac{x}{a}} P(x) \text{ adică}$$

$$\left(a\, e^{-\frac{x}{a}} H(x)\right) = -e^{-\frac{x}{a}} P(x).$$

Cum $P(x) \neq 0$ rezultă $P(x) > 0$ sau $P(x) < 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$ și deci funcția $f(x) = ae^{-\frac{x}{a}} H(x)$ este monotonă, derivata sa păstrînd semn constant. Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ sau $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ după cum $a > 0$ sau $a < 0$ rezultă că $f(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$ adică polinomul H nu are rădăcini reale.

Pentru $a = 1$ și $a = -1$ se regăsesc polinoamele Q și R.

125. Punem $Q(x) = P(x) - KP'(x)$. Polinomul Q nu are rădăcini reale. Polinomul $H(x) = Q(x) + KQ'(x) + K^2Q(x) + \ldots + K^nQ^{(n)}_{(x)}$, nu are rădăcinile reale (vezi problema 124) dar

$$H(x) = P(x) - KP'(x) + K[P'(x) - KP''(x)] +$$
$$+ K^2[P''(x) - KP'''(x)] + \ldots + K^n[P^{(n)}_{(x)} - KP^{(n+1)}_{(x)}] =$$
$$= P(x) - K^{n+1} P^{(n+1)}(x).$$

Cum $P^{(n+1)}(x) = 0$ (s-a notat cu n gradul polinomului R) rezultă $H(x) = P(x)$. Așadar polinomul P nu are rădăcini reale.

126. Dacă a_1, a_2, ..., a_n sînt rădăcinile polinomului f, folosind relațiile lui *Viète* avem $F(x) = P(x) - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i P'(x) +$

$$+ \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j P(x) + \ldots + (-1)^n a_1 \ldots a_n P^{(n)}(x).$$

Dar $F(x)$ se mai scrie:

$$F(x) = \left[P(x) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i P'_{(x)} + \ldots (-1)^{n-1} a_1 \ldots a_{n-1} P^{(n-1)}_{(x)}\right] -$$

$$- a_n \left[P(x) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i P'_{(x)} + \ldots + (-1)^{n-1} a_1 \ldots a_{n-1} P^{(n-1)}_{(x)}\right].$$

Cum F nu are rădăcini reale rezultă că

$$P(x) - \sum_{i=1}^{n-1} a_i P'(x) + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} a_i a_j P''(x) + (-1)^{n-1} a_1 a_2 \ldots$$

$$\ldots a_{n-1} P^{(n-1)}_{(x)}.$$

$P^{(n)}(x)$ nu are rădăcini reale (s-a folosit rezultatul de la problema 125). De aici va rezulta că $P(x) - \sum_{i=1}^{n-2} a_i P'(x) +$ $+ \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-2} a_i a_j P(x) + (-1)^{n-2} a_1 \ldots a_{n-2} P^{(n-2)}(x)$ nu are rădăcini reale și în sfîrșit $P(x) - a_1 P'(x)$ nu are rădăcini reale și deci $P(x)$ nu are rădăcini reale.

127. Avem grad P = grad P' + grad P'' + ... + grad $P^{(n)}$ deci

$n = (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 + 0$ sau $n = \frac{n(n-1)}{2}$ adică $n = 3$.

Așadar, $P(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$.

Identitatea din enunț se scrie

$$P(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 =$$

$$= (3a_0x^2 + 2a_1x + a_2)(6a_0x + 2a_1) \cdot 6a_0.$$

Identificînd coeficienții găsim $P(x) = \pm \frac{1}{6\sqrt{3}} (x-k)^3$.

128. Pentru $x = 0$ avem $|P(0)| \leqslant 0$ și deci $P(0) = 0$. Pentru $x \neq 0$ avem $\left|\frac{P(x)}{x}\right| \leqslant 1$, $\forall x \in \mathbf{R}$ și deci $\left|\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{x}\right| \leqslant$ $\leqslant 1$ rezultă de aici că grad $P \leqslant 1$. Așadar, $P(x) = ax + b$. Cum $P(0) = 0$ rezultă $P(x) = ax$. Inegalitatea din enunț devine $|ax| \leqslant |x|$, $\forall x \in \mathbf{R}$ și deci $|a| \leqslant 1$.

Așadar polinoamele căutate sînt $P(x) = ax$ cu $|a| \leqslant 1$.

Scanned with OKEN Scanner

129. Condiția se scrie $\left|\frac{P(x)}{x^2}\right| \leqslant 1$ pentru $x \in R - \{0\}$. Dacă grad $P > 2$ atunci $\lim_{x\to\infty} \left|\frac{P(x)}{x^2}\right| = \infty$ și deci condiția $\left|\frac{P(x)}{x^2}\right| \leqslant 1$ nu este respectată. Așadar grad $P \leqslant 2$. Fie $P(x) = ax^2 + bx + c$. Rezultă imediat $|a| \leqslant 1$. $|P(x)| \leqslant x^2 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c \leqslant x^2$ și $-ax^2 - bx - c \leqslant x^2$ deci $x^2(1-a) - bx - x \geqslant 0$ și $x^2(1+a) + bx + c \geqslant 0$. Cum aceste inegalități sînt satisfăcute pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem: 1°) $1 - a > 0$, $b^2 + 4c(1-a) \leqslant 0$, $1 + a > 0$, $b^2 - 4ac(1+a) \leqslant 0$ deci $|a| < 1$ și $4ac - b^2 \geqslant 4|c|$ sau 2°) $|a| = 1$, $b = 0$, $c = 0$.

130. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_k$ rădăcinile lui Q și $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ordinele lor de multiplicitate.

Pentru $x \neq x_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ avem $\left|\frac{P(x)}{Q(x)}\right| \leqslant 1$ și deci $\left|\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\right| \leqslant 1$ adică grad $P \leqslant$ grad $Q = n$.

Pentru $x = x_i$ inegalitatea din enunț devine $|P(x_i)| \leqslant |Q(x_i)| = 0$ și deci $P(x_i) = 0$ adică $P(x) = (x - x_i)P_1(x)$.

Deoarece rădăcina x_i are pentru Q ordinul de multiplicitate n_i avem $Q(x) = (x - x_i)^{n_i} Q_1(x)$, $Q_1(x_i) \neq 0$.

Așadar, $|(x - x_i) P_1(x)| \leqslant |(x - x_i)^{n_i} Q_1(x)|$, $\forall x \in \mathbf{R}$; pentru $x \neq x_i$ avem: $|P_1(x)| \leqslant |(x - x_i)^{n_i - 1} Q_1(x)|$ și deci

$$\left|\lim_{\substack{x\to x_i \\ x\neq x_i}} P_1(x)\right| \leqslant \left|\lim_{\substack{x\to x_i \\ n\neq x_i}} (x - x_i)^{n_i - 1} Q_1(x)\right| = 0.$$

Cum funcțiile polinomiale sînt continue rezultă $P_1(x_i) = \lim_{x\to x_i} P_1(x) = 0$ și deci $P_1(x) = (x - x_i)P_2(x)$ adică $P(x) = (x - x_i)^2 P_2(x)$.

În mod asemănător se arată că $P(x) = (x - x_i)^{n_i} P_{n_i}(x)$ și deci $P(x) = (x - x_1)^{n_1} (x - x_2)^{n_2} \ldots (x - x_k)^{n_k} R(x)$, deoarece grad $P \leqslant$ grad Q rezultă $R(x)$ constant și deci $P(x) = aQ(x)$. Deoarece

$$|aQ(x)| \leqslant |Q(x)|, \ \forall x \in \mathbf{R} \text{ rezultă } |a| \leqslant 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

131. Punînd $Q(x) = xP(x-1)$ avem $Q(x) = Q(x+1)$, $\forall x \in \mathbf{R}$ și deci $Q \equiv 0$. Așadar, nu există polinoame verificînd condițiile date.

132. Pentru $x = 0$ egalitatea devine $(-3)P(1) = 0$, deci $P(x)$ se divide cu $(x-1)$.

Pentru $x = 3$ vom avea $3P(3) = 0$, deci $P(x)$ se divide cu $(x-3)$.

Rezultă $P(x) = (x-1)(x-3)Q(x)$ sau înlocuind în relația dată $x(x-1)(x-3)Q(x) = (x-3)x(x-2)Q(x+1)$ adică $(x-1)Q(x) = (x-2)Q(x+1)$.

Pentru $x = 2$, $Q(2) = 0$ deci $Q(x)$ se divide cu $(x-2)$ deci $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)R(x)$ și înlocuind în egalitatea din enunț:

$$x(x-1)(x-2)(x-3)R(x) = (x-3)x(x-1)(x-2)R(x+1)$$

deci $R(x) = R(x+1)$, $\forall x \in \mathbf{R}$, adică $R(0) = R(1) = R(2) = \ldots = R(n) = k$.

Rezultă că polinomul de gradul n, $R(x) - k$ se anulează pentru $n+1$ valori distincte date variabilei, deci $R(x) - k$ este polinomul identic nul, adică $R(x) = k$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Deci polinoamele care satisfac egalitatea din enunț sînt:

$$P(x) = k(x-1)(x-2)(x-3).$$

133. Facem substituția $P(x) = Q(x) + 5$ și obținem:

1°. $(x-4)Q(x+1) - xQ(n) = 0$. Pentru $x = 0$ obținem $Q(1) = 0$, iar pentru $x = 4$ obținem $Q(4) = 0$ deci $Q(x) = (x-1)(x-4)R(x)$. Înlocuind în 1° avem: $(x-4)x(x-3)R(x+1) = x(x-1)(x-4)R(x)$ de unde:

2°. $(x-3)R(x+1) = (x-1)R(x)$. Pentru $x = 3$ și $x = 1$ obținem $R(3) = 0$ și $R(2) = 0$ deci $R(x) = (x-3)(x-2)S(x)$ care înlocuit în 2° dă: $(x-3)(x-2)(x-1)S(x+1) = (x-1)(x-2)(x-3S(x)$ și deci $S(x+1) = S(x)$. Un polinom neconstant nu poate fi funcție periodică pentru că în acest caz ar avea o infinitate de rădăcini. Odată cu rădăcina x_1 ar admite ca rădăcini și pe $x_1 + KT$ $(K \in Z)$, deci $S(x) = K$. Avem $R(x) = K(x-2)(x-3)$.

$$Q(x) = K(x-1)(x-2)(x-3)(x-4);$$

$$P(x) = K(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 5.$$

134. Din formula lui *Taylor* avem:

$$P(x + x_i) = P(x) + \frac{x_i}{1} P'(x) + \frac{x_i^2}{2!} P''(x) + \ldots + \frac{x_i^n}{n!} P^{(n)}(x),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Notînd $S_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$ relația de condiție devine:

(1) $Q(x) = S_1 P'(x) + S_2 P''(x) + \ldots + S_n P^{(n)}(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$

Punînd $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ $(a_n \neq 0)$ avem:

$P'(x) = n\, a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_1$

$P''(x) = n(n-1) a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_{n-1} x^{n-3} + \ldots + 2a_2$

. . . . . .

Coeficientul termenului x^{n-k} din $P^{(n-k)}(x)$ este $n(n-1) \ldots$ $\ldots (n-k+1) a_n$. Termenul de grad $n-1$ din $Q(x)$ are coeficientul $S_1 n a_n$ și deci $S_1 n a_n = 0$ adică $S_1 = 0$. $Q(x)$ devine:

$$Q(x) = S_2 P''(x) + S_3 P'''(x) + \ldots + S_n P^{(n)}(x) = 0.$$

Termenul de grad $n-2$ din $Q(x)$ are coeficientul $n(n-1) a_n S_2$ și deci $n(n-1) a\ S_2 = 0$ adică $S_2 = 0$. Analog se arată că $S_3 = S_4 = \ldots = S_n = 0$.

Condițiile $S_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$ sînt verificate de $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Din problema 168 rezultă că aceasta este singura posibilitate și deci $P(x) = a_n x^n (a_n \neq 0)$.

135. Fie $f(a) = P(x + a)Q(x) - P(x)Q(x + a)$; $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Cum funcția f este constanta 0, derivata sa este nulă deci

$$f'(a) = P'(x + a)Q(x) - Q'(x + a)P(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Presupunem grad $P = m$, grad $Q = n$, $m > n$ și rezultă $f^{(m)}(a) = kQ(x) = 0$, $\forall x$ ceea ce înseamnă că $Q(x) \equiv 0$ ceea ce face ca enunțul să nu aibă sens.

Dacă $n > m$, $f^{(n)}(x) = -hP(x) = 0$, $\forall x$ și deci $P(x) \equiv 0$ adică $\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv 0$. Dacă $m = n$ avem $f^{(n)}(a) = kQ(x) - hP(x)$ și deci $\frac{P(x)}{Q(x)}$ este constant.

Scanned with OKEN Scanner

136. Facem $x=\frac{\pi}{2^2}$ și avem $P\left(\sin\frac{\pi}{2^2}\right)=P\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)=P(1)$. Pentru $x=\frac{\pi}{2^3}$ avem $P\left(\sin\frac{\pi}{2^3}\right)=P\left(\sin\frac{\pi}{2^2}\right)=P(1)$. Prin inducție se arată că $P\left(\sin\frac{\pi}{2^k}\right)=P(1)$, $\forall k\in N^*$.

Cum $\sin\frac{\pi}{2^k}\neq\sin\frac{\pi}{2^h}$ pentru $k\neq h$, rezultă că polinomul $Q(x)=P(x)-P(1)$ are o infinitate de rădăcini $\left(\sin\frac{\pi}{2^k},\ k\in N^*\right)$ și deci este constant adică și P este constant.

137. Notăm $h(x)=P(x)-Q(x)$. Dacă $h(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ cu $a_0\neq 0$, $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=a_0\cdot(\infty)$ deci pentru $x>M$, $h(x)$ are semn constant ceea ce contrazice ipoteza deci $a_0=0$. Așadar, $h(x)$ este o constantă. În acest caz condițiile sînt verificate numai dacă $h(x)=0$, adică $P(x)=Q(x)$.

138. Rădăcinile lui $Q(x)=0$ sînt $x=a\left(\cos\frac{\pi}{2}\pm i\sin\frac{\pi}{n}\right)$.

Fie $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n (a_i\geq 0,\ i=1,2,\ldots,n)$ divizibil la $Q(x)$. Rezultă

$$P\left(a\left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\right)\right)=0 \text{ și deci}$$

1°) $a_0a^n(\cos\pi+i\sin\pi)+a_1a^{n-1}\left[\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]+$ $+\ldots+a_{n-1}a\left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\right)+a_n=0$. Partea imaginară este 0 și deci:

$$a_1a^{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{n}+a_2a^n\sin\frac{(n-2)\pi}{n}+\ldots+a_{n-1}a\sin\frac{\pi}{n}=0.$$

Cum $\sin\frac{k\pi}{n}>0$, $a^k>0$; $a_k\geq 0$, $k=1,2,\ldots,n-1$ rezultă $a_1=a_2=\ldots=a_{n-1}=0$ și deci din 1°) obținem:

$$-a_0a^n+a_n=0 \text{ și deci } P(x)=a_0(x^n+a^n).$$

Scanned with OKEN Scanner

139. Fie $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$.

$$E_k = k(n+k)\int_0^1 (a_0x^{k-1} + a_1x^k + a_2x^{k+1} + \ldots + a_{n-1}x^{n+k-2} + a_nx^{n+k-1})dx =$$

$$= k(n+k)\left(\frac{a_0x^k}{k} + \frac{a_1x^{k+1}}{k+1} + \frac{a_2x^{k+2}}{k+2} + \ldots + \frac{a_{n-1}x^{n+k-1}}{k+n-1} + \frac{a_nx^{n+k}}{k+n}\right)\Bigg|_0^1 = k(n+k)\left(\frac{a_0}{k} + \frac{a_1}{k+1} + \frac{a_2}{k+2} + \ldots + \frac{a_n}{n+k}\right).$$

Notăm $E_k = E$ și avem $\frac{a_0}{k} + \frac{a_1}{k+1} + \frac{a_2}{k+2} + \ldots + \frac{a_n}{k+n} = \frac{E}{k(k+n)} = \frac{E}{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n}\right)$ și deci

$$\frac{a_0 - \frac{E}{n}}{k} + \frac{a_1}{k+1} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n+k-1} + \frac{a_{n-1}}{k+n} + \frac{a_n + \frac{E}{n}}{k+n} = 0$$

pentru $k = 1, 2, 3, \ldots$

Punem $f(x) = \frac{a_0 - \frac{E}{n}}{x} + \frac{a_1}{x+1} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n+k-1} + \frac{a_n + \frac{E}{n}}{k+n} = \frac{Q(x)}{x(x+1)\ldots(x+n)}$. Deoarece $Q(x) = 0$, $\forall x \in N^*$ rezultă că $Q(x) \equiv 0$ și deci $f(x) \equiv 0$ și deci $a_0 - \frac{E}{n} = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_{n-1} = 0$, $a_n + \frac{E}{n} = 0$ (vezi problema 102) și deci $P_n(x) = \frac{E}{n} - \frac{E}{n}x^n = -\frac{E}{n}(x^n - 1)$. Punînd $-\frac{E}{n} = a$, avem $P_n(x) = a(x^n - 1)$.

Condiția este și suficientă:

$$E_k = k(n+k)\int_0^1 a(x^{n+k-1} - x^{k-1}) = ak(n+k)\left(\frac{x^{n+k}}{n+k} - \frac{x^k}{k}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= ak(n+k)\left(\frac{1}{n+k} - \frac{1}{k}\right) = \frac{ak(n+k)(-n)}{k(n+k)} = -an.$$

Scanned with OKEN Scanner

140. Avem formula lui *Lagrange* (valabilă și pentru $x_k \in C$).

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(x_k)}{Q'(x_k)} \cdot \frac{Q(x)}{x - x_k}$$

unde $Q(x) = x^n - 1$ și deci $Q'(x) = nx^{n-1}$.

Așadar, $P(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{nx_k^{n-1}} \cdot \frac{Q(x)}{x - x_k}$ și deci pentru $x = 0$.

$$P(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k(0-1)}{-nx_k^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{n}$$ deoarece $x_k^n = 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

141. Din formula:

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} P(x_k) \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k x_n)}.$$

Obținem pentru $x_k = k$ și $P(x_k) = a^k$:

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} a^k \cdot \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)(x-k-1)\ldots(x-n)}{(-1)^{n-k}\, k!(n-k)!}$$

și deci

$$P(n+1) = \sum_{k=1}^{n} a^k \cdot \frac{(n+1)n \cdot \ldots \cdot (n-k+2)(n-k)\ldots 1}{(-1)^{n-k}\, k!(n-k)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a^k \cdot \frac{(n-1)n \ldots (n-k+1)}{(-1)^{n-k} k!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_{n+1}^k a^k =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n-k} C_{n+1}^k a^k = a^{n+1} - \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} C_{n+1}^k a^k =$$

$$= a^{n+1} - (a-1)^{n+1}.$$

142. Relația se scrie $x[P''(x) - P'(x)] - n[P'(x) - P(x)] = 0$. Punînd $P'(x) - P(x) = Q(x)$ relația devine: $xQ'(x) - nQ(x) = 0$ adică $\frac{Q'(x)}{Q(x)} = \frac{n}{x}$ pentru $n \neq 0$, $Q(x) \neq 0$. Integrînd avem: $\ln Q(x) = n \ln cx$ și deci $Q(x) = (cx)^n = kx^n$ pentru $x \neq 0$, $Q(x) \neq 0$ și cum Q este o funcție continuă pe $\mathbf{R}$ rezultă $Q(x) = kx^n$, $\forall x \in \mathbf{R}$ și deci egalitatea $P'(x) - P(x) = Q(x)$ devine:

$$P'(x) - P(x) = kx^n.$$

Scanned with OKEN Scanner

Derivînd avem:

$$P''(x) - P'(x) = kn x^{n-1}$$
$$P'''(x) - P''(x) = kn(n-1)x^{n-2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P^{(n+1)}(x) - P^{(n)}(x) = kn!$$

Însumînd aceste relații obținem $P^{(n+1)}(x) - P(x) = k(x^n + nx^{n-1} + \ldots + n!)$. Relația $P'(x) - P(x) = kx^n$ arată că gradul lui P este n sau 0 (pentru $k = 0$) și deci $P^{(n+1)}(x) = 0$. Punînd $k = -\frac{a}{n!}$ avem:

$$P(x) = a\left[\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + 1\right].$$

143. 1) Avem evident $2n = 2m + 2$ și deci $m = n - 1$. Din relația dată rezultă că P și Q sînt prime între ele. Derivînd această relație avem: $2P(x)P'(x) = Q(x)[(x^2-1)Q'(x) + 2xQ(x)]$ și deci $Q(x)$ divide $P'(x)$. Cum $m = n - 1$ rezultă că $P'(x)$ și $Q(x)$ au același grad și deci $P'(x) = K \cdot Q(x)$ unde K este o constantă ce va fi determinată. Relația din enunț devine: $P^2(x) = (x^2 - 1) \cdot \frac{P'^2(x)}{k^2} + 1$.

Coeficienții lui x^{2n} sînt respectiv a_n^2 și $\frac{n^2 a_0^2}{k^2}$ și deci $K = \pm n$.

2) Punem $P(x) = \cos(n \arccos x)$ și $Q(x) = \frac{P'(x)}{n} = \frac{n \sin(n \arccos x)}{n\sqrt{1-x^2}}$ și se observă ușor că relația este verificată.

Observație. Astfel definite P și Q sînt funcții definite pe $[-1, 1]$ însă în cazul nostru vom considera prelungirile lor la **R**.

144. Presupunînd existența lui P relația dată devine după înmulțirea cu $x - 1$: $(x - 1)P^2(x) = x^{n+1} - 1$. Cum $x^{n+1} - 1$ are numai rădăcini simple (cu ordin de multiplicitate 1) rezultă că egalitatea $(x - 1)P^2(x) = x^{n+1} - 1$ este falsă și deci nu există n și P în condițiile cerute.

Scanned with OKEN Scanner

145. Vom arăta că derivata lui $T(x)$ este nulă.

$$T'(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) = (-1)^n f(x) g^{(n+1)}(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x)[(-1)^{n-k} + (-1)^{n-k+1}] + f^{n+1}(x) g(x).$$

Dar $f^{(n+1)}(x) = 0$, $g^{(n+1)}(x) = 0$ și $(-1)^{n-k} + (-1)^{n-k+1} = 0$ și deci $T'(x) = 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

Pentru $g(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$ avem $g^{(k)}(x) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $g^{(n)}(x) = (-1)^n$ și deci $T(x) = f(x)$. Așadar, $T(x_0) = f(x)$ pentru orice $x_0 \in \mathbf{R}$.

$$g^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{(x - x_0)^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Vom obține $f(x) = T(x_0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{2(n-k)} f^{(k)}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!} =$

$= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!}$ adică formula lui *Taylor* pentru polinoame.

146. Fie u o rădăcină a polinomului. Avem $|P(u)| =$

$= \left| \frac{n^2+n}{2} x^n + 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} \right| \geqslant \frac{n^2+n}{2} \Big| |u|^n -$

$- |1 + 2u + 3u^2 + \ldots + nu^{n-1}| \geqslant \frac{n^2+n}{2} |u^n| - 1 - 2|u| +$

$+ 3|u|^2 - \ldots - n|u|^{n-1} = (|u|^n - 1) + 2(|u|^n - |u|) + \ldots +$

$+ n(|u^n| - |u|^{n-1})$.

Pentru $|u| > 1$ avem evident $|P(u)| > 0$. Așadar, $|u| \leqslant 1$. Dacă $|u| = 1$ trebuie ca $|1 + 2u + 3u^2 + \ldots + nu^{n-1}| =$

$= \frac{n^2+n}{2} = 1 + |2u| + \ldots + n|u|^{n-1}$ și deci numerele $1, u, \ldots, u^{n-1}$ au același argument și deci sînt reale. Însă numerele reale de modul 1 sînt 1 și -1 care nu verifică ecuația $P(x) = 0$. În concluzie $|u| < 1$.

Scanned with OKEN Scanner

147. Presupunem $|\alpha| < 1$. Cum $z = \alpha$ nu este soluție, avem: $z^n = \frac{\alpha z - 1}{z - \alpha}$ de unde $|z^n| = \frac{|\alpha z - 1|}{|z - \alpha|}$. Punînd $z = \rho(\cos t + i \sin t)$ obținem:

$$\rho^n = \sqrt{\frac{(\alpha\rho\cos t - 1)^2 + \alpha^2\rho^2\sin^2 t}{(\rho\cos t - \alpha)^2 + \rho^2\sin^2 t}} = \sqrt{\frac{\alpha^2\rho^2 - 2\alpha\rho\cos t + 1}{\rho^2 - 2\alpha\rho\cos t + \alpha^2}}$$

$$\rho^{2n} - 1 = \frac{(\rho^2 - 1)(\alpha^2 - 1)}{\rho^2 - 2\alpha\rho\cos t + \alpha^2}. \quad \text{De unde } \rho^2 = 1 \text{ sau}$$

$$\rho^{2n-2} + \rho^{2n-4} + \ldots + \rho^2 + 1 = \frac{\alpha^2 - 1}{\rho^2 - 2\alpha\rho\cos t + \alpha^2}.$$

A doua egalitate este imposibilă deoarece membrul stîng este strict pozitiv, iar al doilea strict negativ și deci $\rho = 1$. Dacă $\alpha = 1$ avem: $z^{n+1} - z^n - z + 1 = 0$ și deci $(z - 1)(z^n - 1) = 0$ rădăcinile avînd evident modulul 1. Dacă $\alpha = -1$, $z^{n+1} + z^n + z + 1 = 0$ și deci $(z + 1)(z^n + 1) = 0$ și obținem din nou rădăcini cu modulul 1.

148. $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$. Fie $\alpha \in (0, 1)$. Avem $|P(-\alpha)| > 1$ și $|P(\alpha)|\,|P(-\alpha)| = |(\alpha^2 - x_1^2)(\alpha^2 - x_2^2)\ldots$ $\ldots(\alpha^2 - x_n^2)|$. Cum $\alpha^2 \in (0, 1)$ și $x_i^2 \in [0, 1]$ rezultă $|\alpha^2 - x_i^2| < 1$ și deci $|P(\alpha)P(-\alpha)| < 1$. Cum $|P(-\alpha)| > 1$ rezultă $|P(\alpha)| \leqslant 1$. Pentru $\alpha = 0$, avem $|P(0)| = |x_1x_2 + \ldots + x_n| \leqslant 1$ și deci pentru $x \in [0, 1]$, $|P(x)| \leqslant 1$.

149. 1) Notăm $f(x) = x^n - nx + 1$ și întocmim șirul lui *Rolle* pentru $(0, \infty)$. Atunci $f'(x) = nx^{n-1} - n$ și deci $x_1 = 1$ (singura rădăcină pozitivă) $f(0) = 1 > 0$; $f(1) = 2 - n < 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = +\infty$. Așadar, ecuația $f(x) = 0$ are o rădăcină $\alpha_n \in (0, 1)$ și alta $\beta_n \in (1, \infty)$.

2) Vom căuta intervale de lungime mai mică în care se găsesc α_n și β_n. Avem $f\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^n - 2 + 1 = \frac{2^n - n^n}{n^n} < 0$ și cum $f(0) > 0$ rezultă că $0 < \alpha_n < \frac{2}{n}$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

$$f\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n - n\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + 1 =$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right]^{\sqrt{n}} - n - \sqrt{n} + 1$$

Scanned with OKEN Scanner

dar $\left(1+\frac{1}{x}\right)>2$ dacă $x>1$ și deci $f\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)>2^{\sqrt{n}}-$ $-n-\sqrt{n}+1$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2^{\sqrt{n}}-n-\sqrt{n}+1\right)=\infty$ există N astfel încît pentru $x>N$; $2^{\sqrt{n}}-n-\sqrt{n}+1>0$ și deci $f\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)>0$. Deoarece $f(A)<0$ avem $1<\beta_n<$ $<1+\frac{1}{\sqrt{n}}$ pentru $n>N$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=1$.

150. Pentru $x\neq 1$ avem: $P(x)=x^{n+1}-\frac{x^n-1}{x-1}=$ $=\frac{x^{n+2}-x^{n+1}-x^n+1}{x-1}$. Polinomul $Q(x)=x^{n+2}-x^{n+1}-x^n+1$ are rădăcinile polinomului $P_n(x)$ și în plus rădăcina 1.

Vom arăta cu șirul lui *Rolle* că polinomul $Q(x)$ are numai două rădăcini pozitive (1 și a_n).

$$Q'(x)=(n+2)x^{n+1}-(n+1)x^n-nx^{n-1}.$$

Rădăcinile lui $Q'(x)$ sînt $x_1=0$ și $x_{2,3}=\frac{n+1\pm\sqrt{5n^2+10n+1}}{2(n+2)}$.

Avem tabloul

x	0	1	x_3	∞
$Q(x)$	1	0	$-$	$+\infty$

$Q(x_3)<0$ deoarece $Q(x)$ admite rădăcina $x=1$. Avem deci o rădăcină a_n în intervalul $(x_3,\ \infty)$.

Se arată ușor că $\frac{n+1+\sqrt{5n^2+10n+1}}{2(n+2)}<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Avem $Q\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)=1$ deoarece $Q(x)=x^n\ (x^2-x-1)+1$, iar $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ este rădăcina ecuației $x^2-x-1=0$. Cum $Q(x_3)<0$ și $Q\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)>0$ rezultă:

$$\frac{n+1+\sqrt{5n^2+10n+1}}{2(n+1)}<a_n<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

151. Ecuația se scrie $(x-1)(x^{n-2}+2x^{n-2}+3x^{n-3}+\\+\ldots+(n-2)x+n-1)=0$.

Avem $x_1=1$ și $x_2x_3x_4\ldots x_{m-1}=(-1)^{n-2}(n-1)$ și deci $|x_2|\,|x_3|\ldots|x_{n-1}|=n-1$. Avem apoi

$$\frac{\sum_{k=2}^{n-1}|x_k|^{n-2}}{n-2}\geqslant\sqrt[n-2]{|x_2|\,|x_3|\ldots|x_{n-1}|}=\sqrt[n-2]{n-1}$$ adică

$$\sum_{k=0}^{n-1}|x_k|\geqslant(n-2)\sqrt[n-2]{n-1}$$

Vom arăta că $(n-2)\sqrt[n-2]{n-1}\geqslant n-1$, dacă $n\geqslant 3$. Pentru $n=3,4$ propoziția este adevărată. Pentru $n\geqslant 5$ avem

$$(n-2)\sqrt[n-2]{n-1}\geqslant n-1\Leftrightarrow(n-2)^{n-2}\geqslant(n-1)^{n-3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(n-2)^{\frac{1}{n-3}}\geqslant(n-1)^{\frac{1}{n-2}}\Leftrightarrow\frac{\ln(n-2)}{n-3}\geqslant\frac{\ln(n-1)}{n-2}.$$

Este suficient să arătăm că $f(x)=\dfrac{\ln x}{n-1}$, $x\geqslant 3$ este descrescătoare. Aceasta rezultă din $f'(x)=\dfrac{1-\ln x-\frac{1}{x}}{(x-1)^2}$.

Cum $\sum_{k=2}^{n-1}|x_k|\geqslant(n-2)\sqrt[n-2]{n-1}\geqslant n-1$ și $x_1=1$ rezultă că $\sum_{k=1}^{n-1}|x_1|\geqslant n$ dacă $n\geqslant 3$. Rădăcinile ecuației date sînt rădăcini și pentru $x^n-1=n(x-1)$.

Fie u o rădăcină a acestei ecuații. Avem deci

$$|u|^n=|1+n(u-1)|\leqslant 1+n|u-1)\leqslant 1+n(|u|+1).$$

Notăm $|u|=\rho>0$ și deci $\rho^n\leqslant n\rho+(n+1)$. Presupunem $\rho\geqslant 2$ și punem $f(\rho)=\rho^n-n\rho-(n+1)$, $f:[2,\infty)$, $f'(\rho)=n(\rho^{n-1}-1)>0$ și $f(2)=2^n-3n-1$. Prin inducție se arată că $2^n>3n+1$ dacă $n\geqslant 4$ și deci $f(\rho)>0$ deoarece f este crescătoare, ceea ce contrazice inegalitatea $\rho^n\leqslant n\rho+n+1$. Așadar $\rho<2$ dacă $n\geqslant 4$. Pentru $n=4$, ecuația dată devine $x^3+x^2+x-3=0$. Cu rădăcinile 1 și $-1\pm i\sqrt{2}$ care au modulele 1, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$. Așadar $|x_k|<2$ pentru $n\geqslant 3$.

Scanned with OKEN Scanner

152. Punem $f(x) = x^n - a_1x^{n-1} - a_2x^{n-2} - \ldots - a_{n-1}x - a_n$. Cum $f(0) = -a_n < 0$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ rezultă că ecuația $f(x) = 0$ are o rădăcină pozitivă $x_n = a$. Vom arăta că pentru $x > a$, $f(x) > 0$, iar pentru $0 < x < a$ avem $f(x) < 0$ adică $f(x) = 0$ nu are altă rădăcină pozitivă. Fie $x > a$ deci $x = ak$ $(k > 1)$.

$$f(x) = f(ak) = k^n\left(a_n - \frac{a_1a^{n-1}}{k} - \frac{a_2a^{n-2}}{k^2} - \ldots - \frac{a_{n-1}a}{k^{n-1}} - \frac{a_n}{k^n}\right) >$$

$$> k^n(a^n - a_1a^{n-1} - \ldots - a_{n-1}a - a_n) = 0.$$

Pentru $0 < x < a$ avem $x = ak$, $0 < k < 1$ și

$$f(x) = f(ak) < k^n(a^n - a_1a^{n-1} - \ldots - a_{n-1}a - a_n) < 0.$$

Așadar rădăcina pozitivă este unică.

Fie r modulul uneia din rădăcinile x_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$; din $x^n = a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ deducem:

$r^n < a_1r^{n-1} + a_2r^{n-2} + \ldots + a_{n-1}r + a_n$, adică $f(r) < 0$.

Cum $r > 0$ rezultă din rezultatele anterioare $r < a$.

153. Pentru $n = 2$ proprietățile sînt adevărate.

a) Punem $P_n(x) = x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - x - 1$. Ecuația dată este $P_n(x) = 0$ care pentru $n > 1$ nu admite rădăcina $x = 1$. Deci ecuația $(x-1)P_n(x) = 0$ adică $x^{n+1} - 2x^n + 1 = 0$ admite rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_n, 1$. Punem $f(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$ și avem: $f'(x) = (n+1)x^n - 2nx^{n-1}$. Rădăcinile derivatei sînt $x = 0$ și $x = \frac{2n}{n+1}$; $f(0) = 1$ și

$$f\left(\frac{2n}{n+1}\right) = \left(\frac{2n}{n+1}\right)^n\left(\frac{2n}{n+1} - 2\right) + 1 = 1 - \frac{2(2n)^n}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$= 1 - \frac{2^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}. \text{ Cum } \left(1+\frac{1}{n}\right) < e \text{ rezultă } f\left(\frac{2n}{n+1}\right) <$$

$$< 1 - \frac{2}{(n+1)e}. \text{ Pentru } n \geqslant 3,\ 2^{n+1} > 3(n+1) \text{ și deci}$$

$f\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 1 - \frac{3}{e} < 0$. Dar $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, deci în șirul lui *Rolle* se înregistrează cel mult trei schimbări de semn adică ecuația $(x-1)P_n(x)$ are cel mult trei rădăcini reale și deci ecuația $P_n(x)$ are cel mult două rădăcini reale.

Scanned with OKEN Scanner

b) $f(2) = 1$ deci rădăcina pozitivă a ecuației $P_n(x) = 0$ este cuprinsă între $\frac{2n}{n+1}$ și 2. Vom restrînge intervalul calculînd $f\left(2-\frac{1}{n}\right)\cdot f\left(2-\frac{1}{n}\right) = 1-\frac{1}{n}\left(2-\frac{1}{n}\right)^n$. Dar $\left(2-\frac{1}{n}\right)^n = \left[1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]^n \geqslant 1+n\left(1-\frac{1}{n}\right) = n$ și deci $f\left(2-\frac{1}{n}\right) \leqslant 0$. Așadar $2-\frac{1}{n} < x_n < 2$.

c) Fie $x_i = r(\cos a + i \sin a)$ una din rădăcinile $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Deoarece x_i nu este pozitivă avem $P_n(r) < 0$ (vezi problema 151). Scriind că x_i verifică ecuația: $x^{n+1} - 2x^n + 1 = 0$ avem: $r^{n+1}[\cos(n+1)a + i \sin(n+1)a] - 2r^n(\cos na + i \sin na) + 1 = 0$ și deci $r^{n+1}\cos(n+1)a - 2r^n \cos na = -1$; $r^{n+1}\sin(n+1)a - 2r^n \sin na = 0$. Ridicînd la pătrat aceste relații și însumînd avem: $r^{2n+2} + 4r^{2n} - 4^{2n+1}\cos a = 1$. Cum $\cos a < 1$ ($\cos \alpha = 1$ conduce la x_i real și pozitiv) rezultă:

$$(r^{n+1} - 2r^n)^2 < 1 \text{ și deci } r^{n+1} - 2r^n > -1.$$

Avem: $r^{n+1} - 2r^n + 1 = (r-1)P_n(r) > 0$. Cum $P_n(r) < 0$ rezultă $r < 1$. Din inegalitatea $\cos a \geqslant -1$ deducem $r^{2n+2} + 4r^{2n} + 4r^{2n+1} \geqslant 1$, adică $(r^{n+1} + 2r^n)^2 \geqslant 1$ și deci $r^{n+1} + 2r^n \geqslant 1$. Deoarece $0 < r < 1$ avem $r^{n+1} < r^n$ deci $3r^n > 1$ sau $r > \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$.

154. Răspunsul este negativ pentru n par. Într-adevăr, dacă P este un polinom de grad par și ecuația $P(x) = \alpha$ are rădăcini reale atunci numărul rădăcinilor reale este par. Cum numărul valorilor lui α pentru care ecuația $P(x) = \alpha$ are rădăcini reale multiple este finit, iar valorile lui α pentru care ecuația $P(x) = \alpha$ are rădăcini reale este infinit rezultă că există numere α pentru care ecuația $P(x) = \alpha$ are cel puțin două rădăcini reale diferite și deci funcția $P : \mathbf{R} \to \mathcal{C}$ nu este injectivă.

Pentru n impar există polinoame care verifică condiția impusă.

Exemplu: $P(x) = x^n$.

155. $P(-x) = (-x + a_1)(-x + a_2) \ldots (-x + a_n) + (-x - a_1)(-x - a_2) \ldots (-x - a_n) = (-1)^n(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) + (-1)^n(x + a_1)(x + a_2) \ldots (x + a_n) = (-1)^n P(x)$

Scanned with OKEN Scanner

și $P(x) \not\equiv 0$. Pentru n par avem: $P(-x) = P(x)$, iar pentru n impar avem: $P(-x) = -P(x)$.

Observație. Funcția $Q : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $Q(x) = (x+a_1)(x+a_2) \ldots (x+a_n) - (x-a_1)(x-a_2) \ldots (x-a_n)$ este impară pentru n par și pară pentru n impar, deoarece $Q(-x) = (-1)^{n+1} Q(x)$.

156. Condiția necesară și suficientă ca $P(x)$ să admită ca axă de simetrie pe $x = a$ este ca $P(a-x) = P(a+x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Dacă $P(x) = Q[(x-a)]^2$, atunci $P(a-x) = Q(x^2)$; $P(a+x) = Q(x^2)$ și deci $P(a-x) = P(a+x)$ adică polinomul admite axă de simetrie pe $x = a$. Reciproc: dacă $P(a-x) = P(a+x)$ atunci $-P'(a-x) = P'(a+x)$ și pentru $x = 0$ rezultă $-P'(a) = P'(a)$ adică $P'(a) = 0$. La fel $-P^{(2k+1)}(a-x) = P^{(2k+1)}(a+x)$ și deci $P^{(2k+1)}(a) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Dezvoltînd $P(x)$ în serie *Taylor* avem:

$$P(x) = P(a) + (x-a)\frac{P'(a)}{1!} + \frac{(x-a)^2 P''(a)}{2!} + \ldots \text{ și deci}$$

$$P(x) = P(a) + (x-a)^2 \frac{P''(a)}{2!} + \frac{(x-a)^4 P'''(a)}{3!} + \ldots$$

Dezvoltarea unui polinom în serie *Taylor* fiind finită avem $Q(x)$ astfel ca $P(x) = Q(x-a)^2$.

157. Avem relațiile: 1°) $f(a-x) = f(a+x)$, 2°) $f(b-x) = f(b+x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

În 1°) facem $x \to b+x$ și avem $f(a-b-x) = f(a+b+x)$.

În 2°) facem $x \to a+x$ și avem $f(b-a-x) = f(a+b+x)$ adică $f(a-b-x) = f(b-a-x)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

Punînd $a-b-x = y$ obținem: $f(y) = f(2(b-a)+y)$ adică funcția polinomială f este periodică și deci constantă (vezi problema 131).

158. Scriem $f(x)$ sub forma $f(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2) \ldots (x-x_n)$. De asemenea $f(m-x) = a_0(m-x-x_1)(m-x-x_2) \ldots (m-x-x_n) = a_0[(m-x_1)-x]\cdot[(m-x_2)-x] \ldots [(m-x_n)-x] = a_0(x_n-x)(x_{n-1}-x) \ldots (x_1-x) = (-1)^n(x-x_n)(x-x) \ldots (x-x_1) = (-1)^n f(x)$. Relația $(-1)^n f(x) = f(m-x)$ înmulțită cu $(-1)^n$ dă: $f(x) = (-1)^n f(m-x)$.

Scanned with OKEN Scanner

159. a) Fie m gradul lui Q, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ rădăcinile sale și $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ordinele lor de multiplicitate. Evident gradele lui $P_1, P_2, \ldots, P_n$ nu depășesc pe m. Pentru $x = x_1$ relația din enunț devine: $P_1^2(x_1) + P^2(x_1) + \ldots + P_n^2(x_p) = Q^2(x_1) = 0$. Cum $P_1(x_1), P_2(x_1), \ldots, P_n(x_1)$ sînt numere reale rezultă că $P_1(x_1) = 0$, $P_2(x_1) = 0$, $\ldots$, $P_n(x_1) = 0$ și deci $P_1(x) = (x - x_1)P_{11}(x)$, $P_2(x) = (x - x_1)P_{21}(x)$ $\ldots$, $P_n(x) = (x - x_1)P_{n1}(x)$ și $Q(x) = (x - x_1)Q_1(x)$. Relația din enunț devine: $P_{11}^2(x) + P_{21}^2(x) + \ldots + P_{n1}^2(x) = Q_1^2(x)$. Procedînd analog vom obține $P_{1i_1}^2(x) + P_{2i_2}^2(x) + \ldots + P_{ni_k}^2(x) = Q_{i_k}^2(x)$, polinomul $Q_{i_k}(x)$ avînd rădăcinile $x_2, x_3, \ldots, x_k$ cu ordinele de multiplicitate $i_2, i_3, \ldots, i_k$.

S-a arătat deci că $P_1, P_2, \ldots, P_n$ admit rădăcina x_1 cu ordinul de multiplicitate cel puțin i_1. La fel se arată că ele admit rădăcinile $x_2, x_3, \ldots, x_k$ cu ordinele de multiplicitate cel puțin $i_2, i_3, \ldots, i_k$. Cum gradul lor nu depășește pe m rezultă că ordinele de multiplicitate ale rădăcinilor $x_1, x_2, \ldots, x_k$ sînt $i_1, i_2, \ldots, i_k$ și că $P_1, P_2, \ldots, P_n$ nu mai au rădăcini deci: $P_1(x) = a_1Q(x)$; $P_2(x) = a_2Q(x)$, $\ldots$, $P_n(x) = a_nQ(x)$ cu $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ și $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 1$. Proprietatea este acum demonstrată.

b) Proprietatea nu se păstrează. Punem

$$P_1(x) = (n-1)x^2 - 1, \quad P_2(x) = P_3(x) = \ldots = P_n(x) = 2x$$

și $Q(x) = (n-1)x^2 + 1$ și avem

$$P_1^2(x) + P_2^2(x) + \ldots + P_n^2(x) = [(n-1)x^2 - 1]^2 + (n-1) \cdot 4x^2 = [(n-1)x^2 + 1]^2 = Q^2(x)$$

însă Q are rădăcini complexe, iar $P_1, P_2, \ldots, P_n$ au rădăcini reale și deci diferite de rădăcinile lui Q.

160. Cum Q nu este constant există o infinitate de numere $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pentru care $Q(x)$ ia valorile diferite $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ și deci $P(a_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, adică P are o infinitate de rădăcini și deci este identic nul.

161. Fie k ordinul de multiplicitate al rădăcinii 1 pentru P. Avem $P(x) = (x-1)^kQ(x)$. $Q(1) \neq 0$. Avem

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^m - 1)^k Q(x^m)}{(x^n - 1)^k Q(x^n)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^m - 1)^k}{(x^n - 1)^k} \cdot \lim_{x \to 1} \frac{Q(x^m)}{Q(x^n)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \left[\frac{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1)}{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)} \right]^k \cdot \frac{Q(1)}{Q(1)} = \left(\frac{m}{n}\right)^k.$$

Scanned with OKEN Scanner

162. Fie P polinomul dat și polinomul Q astfel ca $Q(x) = P(x) - x^k$. Avem $Q(a_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$ și deci $Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_k)S(x)$ și deci

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_k)S(x) + x^k.$$

Vom scrie sub forma $P(x)$:

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_k)[S(x) - 1] + x^k - \\ - (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_k).$$

Polinomul R, $R(x) = x^k - (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_k)$ are gradul inferior lui K și deci constituie restul căutat.

163. Restul împărțirii lui P prin $(x-a_1)(x-a_2) \ldots (x-a_k)$ este un polinom R de grad cel mult $k - 1$.

Avem identitatea

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_k)Q(x) + R(x).$$

Pentru $x = a_1, a_2, \ldots, a_k$, obținem:

$P(a_1) = R(a_1) = A_1$; $P(a_2) = R(a_2) = A_2, \ldots, P(a_k) = R(a_k) = A_k$.

Obținem polinomul R din formula de interpolare a lui *Lagrange*.

$$R(x) = \sum_{i=1}^{k} A_i \frac{(x-a_1)(x-a_2) \ldots (x-a_{i-1})(x-a_{i+1}) \ldots (x-a_k)}{(a_i-a_1)(a_i-a_2) \ldots (a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1}) \ldots (a_i-a_k)}.$$

164. Fie $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $Q(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j x^j$ cu $a_i = a_{n-i}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $b_j = b_{m-j}$, $j = 0, 1, \ldots, m$. Polinomul produs este $(P \cdot Q)(x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k$ unde $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$. Atunci $c_{m+n-k} = \sum_{s+t=m+n-k} a_s b_t$. Avem $0 \leqslant s \leqslant n$, $0 \leqslant t \leqslant m$. Punem $n - s = i$ și $m - t = j$ și avem $i + j = k$ și $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Așadar $c_{m+n-k} = \sum_{i+j=k} a_{n-i}\, b_{m-j}$. Dar cum $a_{n-i} = a_i$ și $a_{m-j} = a_j$ avem $c_{m+n-k} = \sum_{i+j=k} a_i b_j = c_k$, și deci $P \cdot Q$ este un polinom reciproc de speța I.

Observație. Se arată ușor prin inducție că produsul a k polinoame reciproce de speța I este un polinom reciproc de speța I.

Scanned with OKEN Scanner

165. Fie $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$; $Q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$. Polinomul produs este $(P \cdot Q)(x) = \sum_{k=0}^{n-m} c_k x^k$ unde $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$; $c_{m+n-k} = \sum_{s+t=m+n-k} a_s b_t$. Punînd $n - s = i$, $m - t = j$ avem: $c_{m+n-k} = \sum_{i+j=k} a_{n-i}\, b_{n-j}$ unde $0 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant m$.

a) Dacă P și Q sînt polinoame reciproce de speța a doua atunci $a_{n-i} = -a_i$ și $b_{n-j} = -b_j$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, m$, și deci $c_{m+n-k} = \sum_{i+j=k} (-a_i)(-b_j) = \sum_{i+j=k} a_i b_j = c_k$ și deci PQ este un polinom reciproc de speța I.

b) Dacă P este reciproc de speța I și Q este reciproc de speța II, atunci $a_i = a_{n-i}$, $b_j = -b_{m-j}$, $i = 0, 1 \ldots, n$; $j = 0, 1, \ldots, m$ și deci

$$c_{m+n-k} = \sum_{i+j=k} a_i(-b_j) = -\sum_{i+j=k} a_i b_i = -c_k$$

și deci PQ este un polinom reciproc de speța II.

166. a) Rădăcinile distincte ale polinomului P sînt $1, -1, x_2, \bar{x}_2, \ldots, x_k, \bar{x}_k$ ($|x_i| = 1$) ordinele de multiplicitate $n_0, n_1, n_2, n_2, \ldots, n_k, n_k$ cu $n_i \geqslant 0$, $i = 0, 1, \ldots, k$. Polinomul se scrie:

$$P(x) = a_n(x-1)^{n_0}(x+1)^{n_1}[(x-x_2)(x-\bar{x}_2)]^{n_2} \ldots$$
$$\ldots [(x-x_k)(x-\bar{x}_k)]^{n_k}.$$

Fie $x_i = \cos\alpha_i + i \sin\alpha_i$ atunci $\bar{x}_i = \cos\alpha_i - i \sin\alpha_i$ și deci: $(x - x_i)(x - \bar{x}_i) = x^2 - 2x\cos\alpha_i + 1$ adică un polinom reciproc de speța I și deci $(x^2 - 2x\cos\alpha_i + 1)^{n_i}$ este un polinom reciproc de speța I (vezi problema 165). La fel $(x+1)^{n_1}$ este reciproc de speța I.

Polinomul $Q(x) = x - 1$ este reciproc de speța II și deci $(x-1)^{n_0}$ este de speța I dacă n_0 este par și de speța a doua dacă n_0 este impar (vezi problema 165) și deci P este reciproc de speța I dacă n_0 este par și de speța II dacă n_0 este impar. Așadar, $a_i = (-1)^{n_0} a_{n-i}$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Dacă P are rădăcinile x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ și $|x_i| = r$, atunci polinomul $Q \in R[x] Q(x) = P(rx) = \sum_{i=1}^{n} a_i \rho^i x^i$ are rădăcinile x_i' astfel că $x_i = r\, x_i'$ și deci $|x_i'| = \left|\frac{x_i}{r}\right| = 1$ și deci $a_i \rho^i = (-1)^{n_0} a_{n-i} \rho^{n-i}$ $a_i = (-1)^{n_0} r^{2n-i} a_{n-i}$ (ordinele de multiplicitate a rădăcinilor x_i și x_i' sînt egale și deci ordinele de multiplicitate ale lui ρ și 1 sînt egale.

167. Fie $x \in C$ $|x| = 1$ deci $x = \cos\alpha + i \sin\alpha$. Avem

$$P(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k(\cos k\alpha + i \sin k\alpha) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \cos k\alpha + i \sum_{k=0}^{n} a_k \sin k\alpha;$$

$$|P(\cos\alpha + i\sin\alpha)|^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cos k\alpha\right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \sin k\alpha\right)^2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k^2(\cos^2 k\alpha + \sin^2 k\alpha) + 2 \sum_{0 \leqslant k < h \leqslant n} a_k a_h(\cos k\alpha \cos h\alpha +$$

$$+ \sin k\alpha \sin h\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k^2 + 2 \sum_{0 \leqslant k < h \leqslant n} a_k a_h \cos(k-h)\alpha.$$

Vom arăta acum că $\forall b \in \mathbf{R}$ ecuația $\sum_{i=1}^{m} b_i \cos \alpha i = 0$ are soluție. Punînd $f(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} b_i \cos \alpha i$ avem

$$\int_0^{\pi} f(\alpha)\mathrm{d}\alpha = -\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\sin \alpha i}{i}\Big|_0^{\pi} = 0$$

și cum f este continuă există η astfel încît $f(\eta) = 0$.

Din cele arătate rezultă că există α_0 astfel încît: $\sum_{0 \leqslant k < h \leqslant n} a_k a_h \cos(k-h)\alpha_0 = 0$ și deci $|P(\cos\alpha_0 + i\sin\alpha_0)|^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k^2$. Enunțul este acum justificat.

Scanned with OKEN Scanner

168. Fie $x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_n = 0$ ecuația cu rădăcinile $a_1, a_2, \ldots, a_n$ și $S_k = \sum_{i=1}^{n} a_i^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Fie, de asemenea, $x^n + B_1x^{n-1} + B_2x^{n-2} + \ldots + B_k = 0$ ecuația cu rădăcinile $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Evident $S_k = \sum_{i=1}^{n} b_i^k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Relațiile lui *Euler*, se scriu:

1) $S_1 + A_1 = 0$
2) $S_2 + S_1A_1 + 2A_2 = 0$
3) $S_3 + S_2A_1 + S_1A_2 + 3A_3 = 0$
.....
.....
1') $S_1 + B_1 = 0$
2') $S_2 + S_1B_1 + 2B_2 = 0$
3') $S_3 + S_2B_1 + S_1B_2 + 3B_3 = 0$
.....
.....
n) $S_n + S_{n-1}A_1 + \ldots + S_1A_{n-1} + nA_n = 0$
n') $S_n + S_{n-1}B_1 + \ldots + S_1B_{n-1} + nB_n = 0.$

Scăzînd relațiile 1) și 1') găsim $A_1 = B_1$. Scăzînd relațiile 2) și 2') și ținînd seama că $A_1 = B_1$ găsim $A_2 = B_2$. Analog obținem $A_i = B_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Deoarece sistemele $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ și $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sînt soluțiile aceleiași ecuații enunțul este justificat.

169. 1) Deoarece $x^n + 1 \neq 0$ și $\lim_{x \to \pm\infty} \left| \frac{P(x)}{x^n + 1} \right| = |a_0|$ rezultă că M_0 este finit.

$$\left(\frac{P(x)}{x^n + 1}\right)' = \frac{P'(x)(x^n + 1) - nx^{n-1}P(x)}{(x^n + 1)^2}, \quad \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{P(x)}{x^n + 1}\right)' = 0$$

și $x^n + 1 \neq 0$ și deci M_1 este finit; analog se arată că M_2 este finit.

2) Formula lui *Taylor* pentru $f(x) = \frac{P(x)}{x^n + 1}$ dă:

$$f(x + h) = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(c), \quad \forall\, h \in \mathbf{R}$$

și deci

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{hf''(c)}{2} \text{ de unde:}$$

$$|f'(x)| \leqslant \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} + \frac{|h||f''(c)|}{2} \leqslant \frac{2M_0}{|h|} + \frac{|h|M_2}{2}.$$

Punînd $h = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$ găsim $|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{M_0M_2}$, $\forall x$ și deci $M_1^2 \leqslant 4M_0M_2$.

170. Notăm $P(x_k) = b_k$ și avem

$$x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \ldots + a_n = b_0$$
$$x_1^n + a_1x_1^{n-1} + \ldots + a_n = b_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n^n + a_1x_n^{n-1} + \ldots + a_n = b_n.$$

Considerăm aceste relații un sistem cu necunoscutele $1, a_1, a_2, \ldots, a_n$ și avem: $1 = \frac{D_1}{D}$ unde

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_0 & x_0^{n-1} & \ldots & 1 \\ b_1 & x_1^{n-1} & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & x_n^{n-1} & \ldots & 1 \end{vmatrix} \text{ și } D = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \ldots & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

Avem:

$$D_1 = b_0\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} \ldots 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} \ldots 1 \\ \ldots & \ldots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} \ldots 1 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} x_0^{n-1} & x_0^{n-2} \ldots 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} \ldots 1 \\ \ldots & \ldots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} \ldots 1 \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$+ (-1)b_n\begin{vmatrix} x_0^{n-1} & x_0^{n-2} \ldots 1 \\ x_1^{n-1} & x_1^{n-2} \ldots 1 \\ \ldots & \ldots \\ x^{n-1} & x_n^{n-2} \ldots 1 \end{vmatrix}$$

Fie $M = \max(|b_0|, |b_1|, \ldots, |b_n|)$. Rezultă de aici prin dezvoltarea determinanților *Vandermonde:*

$$|D_1| \leqslant M\left(\sum_{k=0}^{n} \prod_{\substack{0 \leqslant l < h \leqslant n \\ l,\, h \neq k}} |x_l - x_h|\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Cum $|D| = \sum_{k=0}^{n} \left(\prod_{0 \leqslant l < k \leqslant n} |x_l - x_k| \right)$ rezultă:

$$1 \leqslant M \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{|x_0 - x_k||x_1 - x_k| \ldots |x_{k-1} - x_k||x_{k-1} - x_k| \ldots |x_n - x_k|} \right).$$

Numerele $x_0, x_1, \ldots, x_n$ fiind întregi și în ordinea dată rezultă: $|x_h - x_k| \geqslant |h - k|$ și deci

$$1 \leqslant M \left(\frac{1}{0!n!} + \frac{1}{1!(n-1)!} + \ldots + \frac{1}{n!0!} \right) \text{ adică}$$

$n! \leqslant M \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} = M \sum_{k=0}^{n} c_n^k = M2^n$. Așadar $M \geqslant \frac{n!}{2^n}$.

171. Fie $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Avem: $x^k = (x^{2k-1} + x^k + kx) - (x^{2k-1} + kx)$

Polinoamele $p_k(x) = x^{2k-1} + x^k + kx$ și $q_k(x) = x^{2k-1} + kx$ sînt crescătoare pe $\mathbf{R}$ deoarece $p_k'(x) \geqslant 0$ și $q_k'(x) \geqslant 0$.

Într-adevăr $p_k'(x) = (2k-1)x^{2k-2} + kx^{k-1} + k$. Punînd $x^{k-1} = y$ avem $p_k'(x) = Q(y) = (2k-1)y^2 + (k-1)y + k$ cu $\Delta = k(4-7k) < 0$ și deci $p_k'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$. $q_k'(x) = (2k-1)x^{2k-2} + k > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Vom avea:

$a_k x^k = |a_k| [p_k(x) - q_k(x)]$ dacă $a_k \geqslant 0$ și

$a_k x^k = |a_k| [q_k(x) - p_k(x)]$ dacă $a_k < 0$ de aici:

$$P(x) = R(x) - S(x),$$

unde $R(x) = \sum_{k=0}^{n} |a_k| r_k(x)$, $S(x) = \sum |a_k| s_k(x)$

cu $\begin{cases} r_k(x) = p_k(x) \text{ și } s_k(x) = q_k(x) \text{ dacă } a_k \geqslant 0 \text{ și} \\ r_k(x) = q_k(x) \text{ și } s_k(x) = p_k(x) \text{ dacă } a_k < 0. \end{cases}$

Cum polinoamele $R(x)$ și $S(x)$ sînt sume de polinoame crescătoare ele sînt crescătoare.

172. Vom demonstra mai întîi că pentru $p \in N^*$ și $x \in [0, 1]$ avem:

(1) $$\frac{1 - x^{p+1}}{p+1} \geqslant \frac{1 - x^p}{p}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Această inegalitate se reduce la $\frac{1+x+x^2+\ldots+x^{p-1}+x^p}{p+1} \geqslant \frac{1+x+x^2+\ldots+x^{p-1}}{p}$ adică $1+x+x^2+\ldots+x^{p-1}-px^p \leqslant 0$, sau încă: $(1-x^p)+(x-x^p)+\ldots+(x^{p-1}-x^p) \leqslant 0$ ceea ce este evident. Pentru $p > q \geqslant 1$, $p, q \in N$, avem inegalitatea $\frac{1-x^p}{p} \geqslant \frac{1-x^q}{q}$ (2), $\forall\, x \in [0, 1]$ deoarece aplicînd succesiv inegalitatea (1) se obține:

$$\frac{1-x^q}{q} \leqslant \frac{1-x^{q+1}}{q+1} \leqslant \frac{1-x^{q+2}}{q+2} \leqslant \ldots \leqslant \frac{1-x^p}{p}.$$

Din inegalitatea (2) rezultă $\frac{1-x^p}{p} \geqslant x^k \frac{1-x^q}{q}$ (3), $\forall\, x \in [0, 1]$, $k \geqslant 0$.

Punînd $p = m+n$, $q = m-n$, $k = n$ inegalitatea (3) devine: $\frac{1-x^{m+n}}{m+n} \geqslant x^n \frac{1-x^{m-n}}{m-n}$ pentru $x \in [0, 1]$ care se mai scrie succesiv

$$[(m+n)-2n](1-x^{m+n}) \geqslant (m+n)(x^n-x^m)$$

$$(m+n)(1-x^{m+n}-x^n+x^m) \geqslant 2n(1-x^{m+n})$$

$$(m+n)(1+x^m)(1-x^n) \geqslant 2n(1-x^{m+n})$$

$$\frac{1-x^m}{2} \geqslant \frac{\frac{1-x^{m+n}}{m+n}}{\frac{1-x^n}{n}} = \frac{P_{m+n}(x)}{P(x)} \text{ pentru } x \in [0, 1).$$

Pentru $x = 1$ inegalitatea este adevărată.

Făcînd $y = \frac{1}{x} > 1$ avem $\frac{1+y^m}{2y^m} \geqslant \frac{P_{m+n}(y)}{y^{m+n-n}P_n(y)}$ adică

$$\frac{1+y^m}{2} \geqslant \frac{P_{m+n}(y)}{P_n(y)} \quad (y > 1).$$

173. Avem identitatea $(x-1)P(x) = x^{n+1} + x^n + \ldots + x - n - 1$, și deci $(x-1)^2 P(x) = x^{n+2} - 1 - (n+2)(x-1) = x^{n+2} - (n+2)x + n + 1$. Rădăcinile ecuației $x^{n+2} - (n+2)x + n + 1 = 0$ sînt $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$ unde $x_{n+1} = x_{n+2} = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Notînd $\sum_{i=1}^{n+2} x_i = S_1$

$$\sum x_1x_2 = S_2$$

$$\vdots$$

$$\sum x_1x_2 \dots x_n = S_n$$

Avem din relațiile lui *Viète* $S_1 = S_2 \dots = S_n = 0$. Punem $E_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_{n+2}^k$. Pentru $k \leqslant n$ scriem formula lui *Newton*:

$$E_k - E_{k+1}S_1 + E_{k-2}S_2 + \dots + (-1)^{k-1}E_1S_{k-1} + (-1)^k kS_k = 0.$$

Cum $S_1 = S_2 \dots = S_n = 0$ rezultă $E_k = 0$ $(k = 1,2,\dots,n)$ și deci $x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k + 1 + 1 = 0$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ adică $x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k = -2$.

174. a) Avem succesiv: $P(x) = nx^{n-1}(x-1) - (x^n - 1 = (x-1)(nx^{n-1} - x^{n-1} - x^{n-2} - \dots - x - 1) = (x-1)(x^{n-1} - x^{n-2} + x^{n-1} - x^{n-3} + \dots + x^{n-1} - x + x^{n-1} - 1) = (x-1)[(x-1)x^{n-2} + (x-1)(x^{n-2} + x^{n-3}) + \dots + (x-1)(x^{n-2} + x^{n-3} + \dots x) + (x-1)(x^{n-2} + \dots + 1)] = (x-1)^2[(n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \dots + 2x + 1]$. Deoarece $x \geqslant 0$ rezultă $P(x) \geqslant 0$.

b) Punem $x = 1 + \frac{1}{n^2-1}$. $P(x) = x^{n-1}[(n-1)x - n] + 1$; $P\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right) = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n-1}\left(\frac{-n}{n+1}\right) + 1 \geqslant 0$ adică $1 - \frac{n^{2n-1}}{(n^2-1)^{n-1}(n+1)} \geqslant 0$ sau $\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \geqslant \frac{n-1}{n}$ și deci $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geqslant 1 - \frac{1}{n}$.

Punem $x = 1 - \frac{1}{(n-1)^2}$, $P\left(1 - \frac{1}{(n-1)^2}\right) = 1 - \left(1 - \frac{1}{(n-1)^2}\right)^{n-1}\left(\frac{n}{n-1}\right) \geqslant 0$ și deci $\frac{n-1}{n} \geqslant \left(1 - \frac{1}{(n-1)^2}\right)^{n-1}$. Facem $n \to n+1$ și avem $1 - \frac{1}{n+1} \geqslant \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$.

Scanned with OKEN Scanner

175. Fie $P(x) = mx^2 + nx + p$. $\int_{-1}^{1} P(x)dx = \frac{mx^3}{3} + \frac{nx^2}{2} + px\Big|_{-1}^{1} = \frac{2m}{3} + 2p$.

Avem deci $\frac{2m}{3} + 2p = a(m+n+p) + b(m-n+p) + cp$, $\forall\, m, n, p \in \mathbf{R}$, adică $m\left(a + b - \frac{2}{3}\right) + n(a-b) + p(a+b+c-2) = 0$, $\forall\, m, n, p \in \mathbf{R}$ și deci $a + b - \frac{2}{3} = 0$, $a - b = 0$, $a + b + c - 2 = 0$ și deci $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{4}{3}$.

176. Punem $f(x) = \frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \ldots + \frac{1}{x-a_n}$ și considerăm funcțiile $g, h : (a_k, a_{k+1}) \to \infty$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ definite prin

$$g(x) = \frac{k}{x-a_k} + \frac{1}{x-a_{k+1}}, \quad h(x) = \frac{1}{x-a_k} + \frac{n-k}{x-a_{k+1}}.$$

Avem $\lim\limits_{\substack{x\to a_k \\ x>a_k}} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to a_{k+1} \\ x<a_{k+1}}} f(x) = -\infty$,

ceea ce ne arată că ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin cîte o rădăcină situată în fiecare interval (a_k, a_{k+1}) $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Cum prin eliminarea numitorilor se obține un polinom de gradul $n-1$ rezultă că în fiecare astfel de interval se află cîte o rădăcină și numai una.

Ecuațiile $g(x) = 0$; $h(x) = 0$ au rădăcinile $x_k' = \frac{ka_{k+1} + a_k}{k+1}$ și $x_k'' = \frac{ka_k + a_{k+1}}{n-k+1}$. Evident ele se află în intervalul (a_k, a_{k+1}), iar dacă x_k este rădăcina ecuației $f(x) = 0$ situată în intervalul (a_k, a_{k+1}) vom avea $f(x_k) = 0$ adică

$$(1)\ \frac{1}{x_k-a_1} + \frac{1}{x_k-a_2} + \ldots + \frac{1}{x_k-a_k} + \frac{1}{x_k-a_{k+1}} + \ldots + \frac{1}{x_k-a_n} = 0 \text{ și deci } \frac{1}{x_k-a_1} + \frac{1}{x_k-a_2} + \ldots + \frac{1}{x_k-a_k} + \frac{1}{x_k-a_{k+1}} = -\frac{1}{x_k-a_{k+2}} - \ldots - \frac{1}{x_k-a_n} \geqslant 0.$$

(egalitatea pentru $k = n-1$).

Dar $\frac{1}{x_k - a_1} + \frac{1}{x_k - a_2} + \ldots + \frac{1}{x_k - a_k} \leqslant \frac{k}{x_k - a_k}$ (cu egalitate pentru $k = 1$) și deci

$$\frac{k}{x_k - a_k} + \frac{1}{x_k - a_{k+1}} > 0 \text{ adică } g(x_k) > 0.$$

Avem, de asemenea,

$$\frac{1}{x_k - a_k} + \frac{n-k}{x_k - a_{k+1}} \leqslant \frac{1}{x_k - a_k} + \frac{1}{x_k - a_{k+1}} + \ldots + \frac{1}{x_k - a_n} =$$

$$= -\frac{1}{x_k - a_1} - \ldots - \frac{1}{x_k - a_{k-1}} \leqslant 0 \text{ și deci } h(x_k) < 0.$$

Cum $g(x) > 0$ pentru $x \in (a_k, x_k')$ rezultă $x_k < x_k'$ și analog $h(x) < 0$ pentru $x \in (x_k'', a_{k+1})$, deci $x_k > x_k''$. Avem deci $x_k'' < x_k < x_k'$ adică $a_k + \frac{a_{k+1} - a_k}{n-k+1} < x_k < a_{k+1} - \frac{a_{k+1} - a_k}{k+1}$ $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Observație. Se deduce imediat că $a_k + \frac{a_{k+1} - a_k}{n} < x_k < a_{k+1} - \frac{a_{k+1} - a_k}{n}$ adică o teoremă a lui *Laguerre*.

177. Punem $x = \operatorname{ctg} a$ și obținem:

$$(\cos a - i \sin a)^n + (\cos a + i \sin a)^n = \sin^n a \text{ și deci}$$

$$2 \cos na - \sin^n a = 0. \quad (1)$$

Rădăcinile din intervalul $[0, \pi)$ ale acestei ecuații furnizează rădăcinile reale ale ecuației date.

Punînd $f(a) = 2 \cos na - \sin^n a$ avem: $f(0) = 2 > 0$; $f\left(\frac{\pi}{n}\right) = -2 - \sin^n \frac{2\pi}{n} < 0$; $f\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 2 - \sin^n \frac{2\pi}{n} > 0$; $\ldots f\left[\frac{(n-1)\pi}{n}\right] = (-1)^{n-1} \cdot 2 - \sin^n \frac{(n-1)}{n}$; $f(\pi) = (-1)^n \cdot 2$. Rezultă de aici că ecuația (1) are rădăcini în fiecare din intervalele $\left(0, \frac{\pi}{n}\right), \left(\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}\right), \ldots, \left(\frac{(n-1)\pi}{n}, \pi\right)$ și deci ecuația dată are cel puțin n rădăcini reale $x_k = \operatorname{ctg} a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Cum gradul ei este n, rezultă că ecuația are n rădăcini și toate sînt reale.

Scanned with OKEN Scanner

178. Dacă notăm $P(x) = x^3 + px + q$ atunci $P(-x) = -x^3 - px + q$. Știm că ecuația are cel puțin o rădăcină reală, ea fiind de grad impar și vom studia patru cazuri, corespunzător semnelor parametrilor p și q.

1) $p > 0, q > 0 \Rightarrow v = 0; v' = 1$ și prin urmare ecuația are o singură rădăcină reală, care este negativă și două rădăcini complexe.

2) $p > 0, q < 0 \Rightarrow v = 1, v' = 0$ deci ecuația are o singură rădăcină reală, pozitivă și două rădăcini complexe.

3) $p < 0, q > 0 \Rightarrow v = 2, v' = 1$, ecuația are o rădăcină reală negativă, iar celelalte două sau sînt pozitive sau sînt ambele complexe.

4) $p < 0, q < 0 \Rightarrow v = 1; v' = 2$ ecuația are o rădăcină pozitivă, iar celelalte două sau sînt negative, sau sînt ambele complexe.

Observație. Acest exercițiu este o situație particulară a cazului general $P(x) = x^n + px + q$ și după cum s-a văzut se poate rezolva cu ajutorul teoremei lui *Descartes*. Cazul general îl tratăm (exercițiu 187) cu ajutorul teoremei lui *Sturm*.

179. Notăm cu x raza cercului și cu 2α, 2β, 2γ, măsurile unghiurilor $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$. (vezi figura 4).

Avem $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = \pi$ sau $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ deci $\sin(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \cos\gamma$, adică: $\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \cos\gamma$.

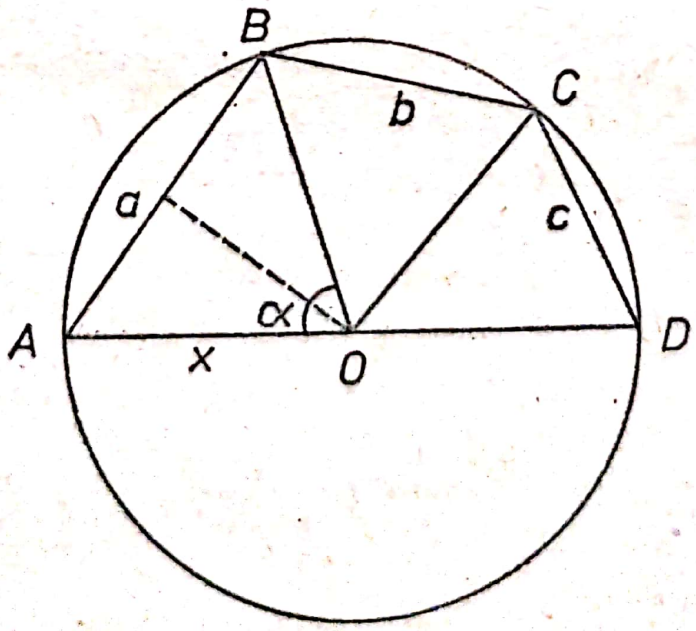

Fig. 4

Ducînd proiecțiile centrului O pe coardele AB, BC, CD deducem

$$\sin\alpha = \frac{a}{2x}\ ;\ \sin\beta = \frac{b}{2x}\ ;\ \sin\gamma = \frac{c}{2x}$$

încît egalitatea de mai sus devine

$$\frac{a}{2x}\sqrt{1-\frac{b^2}{4x^2}} + \frac{b}{4x^2}\sqrt{1-\frac{a^2}{4x^2}} = \sqrt{1-\frac{c^2}{4x^2}} \quad \text{sau}$$

$$a\sqrt{4x^2-b^2} + b\sqrt{4x^2-a^2} = 2x\sqrt{4x^2-c^2}$$

de unde, eliminînd radicalii, obținem

$$16x^6 - 8x^4(a^2+b^2+c^2) + x^2(a^2+b^2+c^2)^2 - a^2b^2c^2 = 0$$

adică $$[4x^3 - x(a^2+b^2+c^2)]^2 = a^2b^2c^2 \quad \text{și}$$

$$x[4x^2 - (a^2+b^2+c^2)] = \pm abc.$$

Considerînd cazul

$$x[4x^2 - (a^2+b^2+c^2)] = abc$$

ecuația:

$$4x^3 - x(a^2+b^2+c^2) - abc = 0$$

este de grad impar și prezintă o singură variație. Deci ea are o singură rădăcină reală, pozitivă.

În cazul $x[4x^2 - (a^2+b^2+c^2)] = -abc$ obținem ecuația

$$4x^3 - x(a^2+b^2+c^2) + abc = 0$$

care nu admite nici o rădăcină convenabilă în problema noastră. Într-adevăr, ținînd seamă că $4x^2 = AD^2 = AC^2 + CD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{ABC} + c^2 > a^2 + b^2 + c^2$ deoarece $\widehat{ABC} > 90°$ și deci $\cos\widehat{ABC} < 0$, avem

$$4x^3 - x(a^2+b^2+c^2) + abc = x[4x^2 - (a^2+b^2+c^2)] + abc > 0.$$

180. Deoarece $a > 0$, ecuațiile $P(x) = 0$ și $(x-a)P(x) = 0$ au aceleași rădăcini negative, iar rădăcinile pozitive ale primei ecuații sînt cu una mai puțin decît ale celei de-a doua. Rezultă că în ecuația $(x-a)P(x) = 0$ numărul de variații este mai mare decît numărul rădăcinilor pozitive, ceea ce înseamnă că ea are rădăcini complexe.

Scanned with OKEN Scanner

181. Fie $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + bx^p + (b+r)x^{p-1} + (b+2r)x^{p-2} + (b+3r)x^{p-3} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$. —

Atunci

$$(x-1)P(x) = a_0x^{n+1} + a_1x^n + \ldots + bx^{p+1} + (b+r)x^p + (b+2r)x^{p-1} + (b+3r)x^{p-2} + \ldots + a_{n-1}x^2 + a_nx - a_0x^n - \ldots - bx^p - (b+r)x^{p-1} - (b+2r)x^{p-2} - (b+3r)x^{p-3} - \ldots - a_{n-1}x - a_n = a_0x^{n+1} + \ldots + rx^p + rx^{p-1} + rx^{p-2} + \ldots - a_n$$

și am obținut astfel un polinom care are trei termeni consecutivi cu coeficienți egali. Deci ecuația $(x-1)P(x) = 0$ are rădăcini complexe. Atunci și ecuația $P(x) =$ are rădăcini complexe.

182. Fie $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k$ și considerăm polinomul

$$Q(x) = P(x) - xP'(x) + x^2P''(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k - x\sum_{k=0}^{n} a_kkx^{k-1} + x^2\sum_{k=0}^{n} a_k\,k(k-1)x^{k-2} = \sum_{k=0}^{n} a_k[1-k+k(k-1)]x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k(1-k)^2x^k = a_0 + a_2x^2 + \ldots$$

Deoarece P are toate rădăcinile reale, el nu prezintă nici o lacună, iar între oricare doi termeni consecutivi există o variație de semn. Atunci, coeficienții a_0 și a_2 au același semn și prin urmare polinomul Q prezintă o lacună între doi termeni cu coeficienți de același semn. Conform teoremei lacunelor, Q are rădăcini complexe.

183. Avem $P_0(x) = P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x - 12$ și $P'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 4$, deci vom lua

$$P_1(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 2.$$

Împărțind P_0 la P_1 obținem restul $R_1(x) = -x^2 - 11x - 50$ încît vom lua

$$P_2(x) = x^2 + 11x + 50.$$

Deoarece P_2 este de gradul al doilea și are discriminantul

$$\Delta = 121 - 200 = -79 < 0$$

rezultă că $P_2(x) > 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

Polinomul P_2 avînd semn constant, înseamnă că am încheiat operațiunea de construire a șirului *Sturm* pe care îl vom atașa polinomului dat, iar acesta este

$$P_0(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x - 12$$
$$P_1(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 2$$
$$P_2(x) = x^2 + 11x + 50$$

Semnele sînt indicate în tabelul următor:

x	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$
$-\infty$	$+$	$-$	$+$
∞	$+$	$+$	$+$

de unde se vede că

$$V(-\infty) = 2 \qquad V(\infty) = 0.$$

Rezultă că numărul de rădăcini reale ale polinomului

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x - 12$$

este

$$V(-\infty) - V(\infty) = 2$$

și deoarece

$$P(-2) = 32 > 0; \quad P(-1) = -4 < 0.$$
$$P(2) = -16 < 0; \quad P(3) = 12 > 0.$$

avem

$$x_1 \in (-2, -1) \text{ și } x_2 \in (2, 3)$$

celelalte două rădăcini ale polinomului fiind complexe.

184. Avem $P_0(x) = P(x) = x^6 - 2x^5 + x^6 - 4x^3 + 5x^2 + 2x - 3$ și deoarece $P'(x) = 6x^5 - 10x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 10x + 2$ vom lua $P_1(x) = 3x^5 - 5x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 5x + 1$.

Aplicînd polinoamelor P_0 și P_1 algoritmul lui *Euclid*, găsim în final că ele au c.m.m.d.c. binomul $x - 1$. Aceasta înseamnă că polinomul dat $P(x)$ are rădăcini multiple și deoarece

$$P(1) = P'(1) = 0, \qquad P''(1) = -12 = 0$$

rezultă că el are rădăcina dublă $x = 1$.

Împărțind acum polinomul $P(x)$ la $(x-1)^2$ obținem: $P(x) = (x-1)^2 (x^4 - 4x - 3)$ încît problema revine la a afla numărul de rădăcini reale ale polinomului

$$Q(x) = x^4 - 4x - 3.$$

Construim un șir *Sturm* pentru acest polinom

$$Q_0(x) = x^4 - 4x - 3$$
$$Q'(x) = 4x^3 - 4$$
$$Q_1(x) = x^3 - 1$$

Împărțind Q_0 la Q_1 obținem restul $R_1(x) = -3x - 3$, încît

$$Q_2(x) = x + 1$$

după care, împărțind Q_1 la Q_2 restul este $R_2 = -2$, deci $Q_3(x) = 2$.

Șirul lui *Sturm* este:

$$Q_0(x) = x^4 - 4x - 3$$
$$Q_1(x) = x^3 - 1$$
$$Q_2(x) = x + 1$$
$$Q_3(x) = 2$$

Din tabelul următor

x	$Q_0(x)$	$Q_1(x)$	$Q_2(x)$	$Q_3(x)$
$-\infty$	+	−	+	−
∞	+	+	+	+

avem $V(-\infty) = 2; \quad V(\infty) = 0$

deci polinomul $Q(x)$ are două rădăcini reale.

Să mai observăm că din tabelul

x	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$
-1	+	−	0	+
0	−	−	+	+

avem $V(-1) = 2, \quad V(0) = 1$

încît rezultă că polinomul Q are o singură rădăcină reală în intervalul $(-1, 0)$.

Scanned with OKEN Scanner

În concluzie, polinomul dat $P(x)$ are o rădăcină dublă $x = 1$, alte două rădăcini reale și două rădăcini complexe. El are o singură rădăcină reală în intervalul $(-1, 0)$.

185. Construim un șir *Sturm* de polinoame atașat polinomului

$$P(x) = x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 11x^3 - 3x^2 - 3x + 1$$

și cum $P'(x) = 6x^5 - 15x^4 - 12x^5 + 12x^3 + 33x^2 - 6x - 3$

vom lua $P_0(x) = P(x)$ și

$$P_1(x) = 2x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 2x - 1.$$

Aplicînd algoritmul lui *Euclid* vom obține:

$R_1(x) = -9x^4 + 18x^3 + 3x^2 - 12x + 3$ și deci

$$P_2(x) = 3x^4 - 6x^3 - x^2 + 4x - 1$$

apoi $R_2(x) = -16x^3 + 24x^2 - 4$ deci $P_3(x) = 4x^3 - 6x^2 +$

$+ 1$ după care $R_3(x) = -26x^2 + 26x - 5$ deci

$$P_4(x) = 26x^2 - 26x + 5.$$

În continuare obținem:

$$R_4(x) = -36x + 18 \text{ și } P_5(x) = 2x - 1$$

și în final $R(x) = -3$ deci $P_6(x) = 3$.

Așadar, șirul *Sturm* căutat este

$$P_0(x) = x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 11x^3 - 3x^2 - 3x + 1$$
$$P_1(x) = 2x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 2x - 1$$
$$P_2(x) = 3x^4 - 6x^3 - x^2 + 4x - 1$$
$$P_3(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$$
$$P_4(x) = 26x^2 - 26x + 5$$
$$P_5(x) = 2x - 1$$
$$P_6(x) = 3$$

și vom avea

x	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	$P_6(x)$
∞	+	+	+	+	+	+	+
$-\infty$	+	−	+	−	+	−	+

deci $V(\infty) = 0, \quad V(-\infty) = 6$

și prin urmare P are 6 rădăcini reale.

Scanned with OKEN Scanner

Observație cu caracter practic. Deoarece pentru ultimul polinom din șirul *Sturm* cerința esențială este ca el să aibă semn constant pentru comoditatea scrierii, în unele lucrări se notează acesta cu 1 cînd el este pozitiv și cu —1 cînd el este negativ.

186. Pentru prima afirmație dăm demonstrația prin inducție completă. Pentru $n = 1$ avem $y + \frac{1}{y} = x = P_1(x) \in Z[x]$; pentru $n = 2$ avem $y^2 + \frac{1}{y^2} = \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 - 2 = x^2 - 2 = P_2(x) \in Z[x]$. Presupunînd acum că: $y^k + \frac{1}{y^k} = P(x) \in Z[x]$ și grad $P_k = k$ pentru orice $k \leqslant n$, vom avea

$$y^{n+1} + \frac{1}{y^{n+1}} = \left(y^n + \frac{1}{y^n}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) - \left(y^{n-1} + \frac{1}{y^{n-1}}\right) = xP_n(x) - P_{n-1}(x) \in Z[x].$$

Evident, grad $[xP_n(x) - P_{n-1}(x)] = n + 1$.

Totodată, a rezultat următoarea relație de recurență.

(1) $$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x), \quad n = 2, 2, \ldots,$$

De asemenea, se demonstrează prin inducție completă (vezi demonstrația dată în cazul polinoamelor *Legendre)* că

(2) $$(4 - x^2)P_n'(x) + nx\,P_n(x) - 2n\,P_{n-1}(x) = 0, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Cu ajutorul acestor relații demonstrăm că șirul de polinoame

$$P_n(x), \quad P_{n-1}(x) \ldots P_1(x), \quad P_0(x) = 1$$

este un șir *Sturm*. Într-adevăr,

1) din egalitatea (1), deducem că două polinoame consecutive din șir nu pot avea rădăcini comune (o astfel de rădăcină ar fi rădăcină pentru toate polinoamele șirului, inclusiv pentru $P_0(x) = 1$. Absurd!).

2) $P_0(x) = 1 > 0$.

3) Dacă $x = x_0$ este rădăcină a lui $P_k(x)$; $k = 1, 2, \ldots, n - 1$ atunci conform (1) rezultă

$$P_{k+1}(x_0) = -P_{k-1}(x) \quad k = 1, 2, \ldots, n - 1$$

deci numerele $P_{k+1}(x_0)$ și $P_{k-1}(x_0)$ sînt de semn contrar.

Scanned with OKEN Scanner

4) Dacă $x_0 \in (-2, 2)$ este o rădăcină a lui $P_n(x)$ atunci

$$(4 - x_0)\, P'_n(x_0) = 2n\, P_{n-1}(x_0)$$

deci sgn $P'_n(x_0) = \text{sgn}\ P_{n-1}(x_0)$.

Observînd acum că din (2) avem $P_{k+1}(2) = -P_{k-1}(-2)$ și $P_{k+1}(2) = P_{k-1}(2)$; $k = 1, 2, \ldots, n-1$, rezultă că șirul de numere

$$P_n(-2),\ P_{n-1}(-1), \ldots,\ P_1(-2),\ P_0(-2)$$

prezintă numai variații, iar șirul

$$P_n(2),\ P_{n-1}(2) \ldots P_1(2),\ P_0(2)$$

prezintă numai permanențe.

Deci P_n are n rădăcini reale, iar acestea se găsesc în intervalul $(-2, 2)$.

187. Vom considera $p \neq 0$; $q \neq 0$ deoarece în caz contrar sîntem conduși la ecuații binome. Dacă notăm $P(x) = x^n + pn + q$ avem $P'(x) = nx^{n-1} + p$ și aplicînd algoritmul lui Euclid obținem:
$R_1(x) = p(n-1)x + nq$ deci $P_2(x) = -p(n-1)x - nq$, apoi pentru a calcula restul împărțirii polinomului $P_1(x) = P'(x) = nx^{n-1} + p$ la polinomul P_2, vom observa că acesta are rădăcina $x = -\dfrac{nq}{p(n-1)}$ și prin urmare

$$R_2(x) = P_1\left(-\frac{nq}{p(n-1)}\right) = n\left[-\frac{nq}{p(n-1)}\right]^{n-1} + p \text{ deci}$$

$$P_3(x) = -(n-1)^{n-1}p^n + (-1)^n \cdot n^n q^{n-1}.$$

Șirul *Sturm* atașat polinomului P este

$$P_0(x) = x^n + px + q$$
$$P_1(x) = nx^{n-1} + p$$
$$P_2(x) = -p(n-1)x - nq$$
$$P_3(x) = -(n-1)^{n-1}p^n + (-1)^n n^n q^{n-1}$$

și vom considera în continuare două cazuri:

A) $n =$ *număr impar*
Atunci $P_3(x) = -(n-1)^{n-1}p^n - n^n q^{n-1}$ și vom avea două subcazuri

a) $P_3(x) > 0$ ceea ce — dacă avem în vedere că $q^{n-1} > 0$ oricare ar fi $q \in R - \{0\}$ deoarece $n - 1$ este număr par — impune cu necesitate $p < 0$

Scanned with OKEN Scanner

și vom avea

x	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	V
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	3
∞	$+$	$+$	$+$	$+$	0

iar ecuația va avea 3 rădăcini reale.

b) $P_3(x) < 0$, atunci pentru $p > 0$ vom avea

x	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	V
$-\infty$	$-$	$+$	$+$	$-$	2
∞	$+$	$+$	$-$	$-$	1

iar pentru $p < 0$ vom avea

x	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	V
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$-$	2
∞	$+$	$+$	$+$	$-$	1

și prin urmare ecuația va avea o singură rădăcină reală.

B) $n =$ *număr par*

Atunci $P_3(x) = -(n-1)^{n-1}p^n + n^n q^{n-1}$ care poate fi număr pozitiv sau negativ. Cum semnul polinomului P_2 depinde de semnul lui p, vom avea următoarele 4 situații

$p > 0;\ P_3(x) > 0$

x	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	V
$-\infty$	$+$	$-$	$+$	$+$	2
∞	$+$	$+$	$-$	$+$	2

$p > 0;\ P_3(x) < 0$

x	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	V
$-\infty$	$+$	$-$	$+$	$-$	3
∞	$+$	$+$	$-$	$-$	1

$p < 0;\ P_3(x) > 0$

x	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	V
$-\infty$	$+$	$-$	$-$	$+$	2
∞	$+$	$+$	$+$	$+$	0

$p < 0;\ P_3(x) < 0$

x	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	V
$-\infty$	$+$	$-$	$-$	$-$	1
∞	$+$	$+$	$+$	$-$	1

de unde se vede că ecuația dată are două rădăcini reale sau nici una.

Scanned with OKEN Scanner

188. Vom considera $a = 0$; $b = 0$ deoarece, ca și în cazul precedent situația contrară ne conduce la ecuații binome. Dacă notăm $P(x) = x^5 - 5ax^3 + 5a^2x + 26$ avem $P'(x) = 5x^4 - 15ax^2 + 5a^2$ deci vom lua $P_1(x) = x^4 - 3ax^2 + a^2$ și cum la împărțirea lui P prin P' obținem: $R_1(x) = -2ax^3 + 4a^2x + 2b$ și deci $P_2(x) = ax^3 - 2a^2x - b$.

Pentru a continua operațiunea este necesar să folosim polinomul aP_1 și se obține $P_2(x) = -a^2x^2 + bx + a^3$, iar pentru exprimarea polinomului P_3 vom ține seamă că factorul nenul a cu care am înmulțit polinomul P_1 afectează semnul restului (el putînd fi pozitiv sau negativ). De aceea vom lua

$$P_3(x) = a(a^2x^2 - bx - a^3).$$

Continuînd, împărțim acum P_2 la $a^2x^2 - bx - a^3$ și vom avea

$$\begin{array}{r|l} ax^3 - 3a^3x - b & a^2x^2 - bx - a^3 \\ \hline a^2x^3 - 2a^3x - ab & x + b \\ -ax^3 + bx^2 + a^3x & \\ \hline \diagup \quad bx^2 - a^3x - ab \;|\; a^2 & \\ \hline a^2bx^2 - a^5x - a^3b & \\ -a^2bx^2 + b^2x + a^3b & \\ \hline \diagup \quad -(a^5 - b^5)x & \end{array}$$

Dintre factorii de amplificare a și a^2 care au fost utilizați pe parcurs numai a poate afecta semnul restului $R_3(x) = -(a^5 - b^2)x$ așa încît trebuie să luăm

$$P_4(x) = a(a^5 - b^2)x.$$

Ultima etapă de aplicare a algoritmului ne dă $R_4(x) = -a^4$, deci $P_5(x) = a^4$. Așadar, șirul *Sturm* căutat este:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= x^5 - 5ax^3 + 5a^2x + 2b \\ P_1(x) &= x^4 - 3ax^2 + a^2 \\ P_2(x) &= ax^3 - 2a^2x - b \\ P_3(x) &= a(a^2x^2 - bx - a^3) \\ P_4(x) &= a(a^5 - b^2)x \\ P_5(x) &= a^4 > 0 \end{aligned}$$

și se vede că, în timp ce semnele polinoamelor P_2, P_3 depind de parametrul a (și numai de el), polinomul P_4 are semnul

Scanned with OKEN Scanner

dependent și de valoarea $c = a^5 - b^2$. De aceea vom distinge următoarele cazuri:

A. $a^5 - b^2 > 0$ ceea ce implică $a^5 > b^2$ deci $a > 0$.

Vom avea

x	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	V
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	5
∞	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0

și deci P are 5 rădăcini reale.

B. $a^5 - b^2 < 0$.

Vom studia cele două subcazuri corespunzătoare semnelor lui a și anume:

— pentru $a > 0$

x	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	V
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	3
∞	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	2

— pentru $a < 0$

x	$P_0(x)$	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$	V
$-\infty$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	3
∞	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	2

adică P are o singură rădăcină reală.

C. $a^5 - b^2 = 0$ adică $a^5 = b^2$ deci $a > 0$.

În acest caz $P_4(x) = 0$ și deci polinomul P are rădăcini multiple, iar acestea sînt rădăcinile celui mai mare divizor comun al polinoamelor P și P', care este $a^2x^2 - bx - a^3$. Rădăcinile acestuia sînt reale deoarece avem $\Delta = b^2 + 4a^5 = 5a^5 > 0$ și fiecare din ele fiind rădăcină dublă pentru P, cea de-a cincea rădăcină a sa va fi tot reală.

189. Deoarece, pentru orice $x \geqslant 0$, avem $P(x) > 0$ rezultă că, eventualele rădăcini reale ale polinomului P sînt în mod necesar negative. Vom considera deci

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \text{ cu } x \in (-\infty, 0)$$

Scanned with OKEN Scanner

și observăm că:

(1) $$P_n(x) = P_{n-1}(x) + \frac{x^n}{n!}$$

(2) $$P'_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = P_{n-1}(x),$$

iar cu ajutorul acestor rezultate arătăm că, dacă $x \in \in (-\infty, -\varepsilon)$ (unde ε este un număr pozitiv suficient de mic), atunci

$$P_n,\ P_{n-1},\ -\frac{x^n}{n!}$$

constituie un șir *Sturm*.
Într-adevăr.,

— se constată cu ușurință că o eventuală rădăcină comună pentru oricare două polinoame consecutive din șir nu poate fi decît $x = 0$ ceea ce, evident, este absurd;

— polinomul $-\frac{x^n}{n!}$ are semn constant pentru orice număr n finit;

— dacă x_0 este o rădăcină a polinomului P_{n-1} atunci, conform relației (1) avem $P_n(x_0) = \frac{x_0^n}{n!}$ număr, evident de semn contrar cu $-\frac{x^n}{n!}$;

— din (2) rezultă că sgn $P_{n-1}(x) =$ sgn $P'_n(x)$ pentru orice $x \in (-\infty, -\varepsilon)$.
Prin urmare vom avea

x	$P_n(x)$	$P_{n-1}(x)$	$-\frac{x^n}{n!}$
$-\infty$	$(-1)^n$	$(-1)^{n-1}$	$-(-1)^n$
$-\varepsilon$	$+$	$+$	$-(-1)^n$

(semnul pentru P_n și P_{n-1} cu $-\varepsilon$ se determină prin trecere la limită pentru $x \to 0$).

Deoarece $-(-1)^n = (-1)^{n-1}$ se vede că, oricare ar fi n, în primul șir de semne există o singură variație, în timp ce, în șirul al doilea există o variație dacă n este număr par și nu există nici o variație dacă n este impar.

În consecință P_n are o singură rădăcină reală (iar aceasta este negativă) dacă n este impar și nu are nici o rădăcină reală dacă n este par.

Scanned with OKEN Scanner

190. Fie $P(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ polinom cu coeficienți reali care nu are rădăcini multiple. Atunci $P'(x) = 3a_0x^2 + 2a_1x + a_2$; $P''(x) = 6a_0\,x + 2a_1$; $P'''(x) = 6a_0$ și prin urmare

$$Q(x) = 2\ P(x)\ P''(x) - [P'(x)]^2 = 3a_0^2x^4 + \ldots$$

Arătăm că șirul de polinoame: Q, Q', P'^2 este un șir *Sturm*. Într-adevăr, dacă $x = x_0$ este o rădăcină a polinomului $Q'(x) = 2P(x)\ P'''(x) = 12\ a_0P(x)$ rezultă că $P(x_0) = 0$ și prin urmare $Q(x_0) = -[P'(x_0)]^2 \neq 0$ (x_0 nu poate fi rădăcină și pentru P' deoarece P nu are rădăcini multiple); celelalte condiții sînt evident satisfăcute. Prin urmare

x	$Q(x)$	$Q'(x)$	$P'(x)^2$	V
$-\infty$	$+$	$-$	$+$	2
∞	$+$	$+$	$+$	0

și deci Q are două rădăcini reale.

Dacă $x = x_0$ este rădăcină dublă a lui P atunci $P(x_0) = P'(x_0) = 0$; $P''(x_0) \neq 0$ și se vede că $Q(x_0) = 0$; $Q'(x_0) = 0$.

De asemenea, deoarece

$$Q''(x) = 12a_0 \cdot P'(x);\ Q'''(x) = 12a_0 \cdot P''(x)$$

rezultă că $Q''(x_0) = 0$ și $Q'''(x_0) \neq 0$ adică $x = x_0$ este rădăcină triplă a lui Q.

Dacă această valoare este rădăcină triplă a lui P, atunci, ca și mai înainte, rezultă că este o rădăcină multiplă de ordinul patru a lui Q.

Scanned with OKEN Scanner

1. a) Avem $S = y_1 + y_2 = x_1^3 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = m^3 - 3mn.$

$$P = y_1y_2 = x_1^3x_2^3 = n^3$$

Ecuația este (1) $y^2 - ym(m^2 - 3n) + n^3 = 0.$

b) Punem $x_1 = \sqrt[3]{a}$, $x_2 = \sqrt[3]{b}$ și deoarece $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \in Z - \{0\}$ rezultă $m \in Z - \{0\}$. Ecuația (1) are rădăcinile întregi a și b și deci

$$m(m^2 - 3n) = a + b \text{ și } n^3 = ab.$$

Rezultă $n = \dfrac{m^3 - a - b}{3n} \in Q$ și cum $n^3 \in Q$ rezultă $n \in Z$. Discriminantul ecuației (1) este $\Delta = m^2(m^2 - 3n)^2 - 4n^3 = (m^2 - 4n)(m^2 - n)^2$. Dar ecuația (1) are rădăcini întregi și deci numărul Δ este pătrat perfect, deci $m^2 - 4n$ este pătrat perfect ($m^2 \neq n$; altfel rădăcinile ecuației date nu sînt reale).

Așadar, ecuația $x^2 - mx + n = 0$ are rădăcini raționale și deci întregi. Rezultă $\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{b} \in Z$.

2. Se impun condițiile: $f(0) > 0$, $f(1) > 0$, $\Delta > 0$, $0 < -\dfrac{b}{2a} < 1$ adică $c > 0$; $a + b + c > 0$; $b^2 - 4ac > 0$; $0 < -b < 2a$.

Din $0 < -b < 2a$ avem $b^2 < 4a^2$ și cum $b^2 > 4ac$ rezultă $a > c$. Deoarece $a, c \in Z$ avem $a \geq c + 1$, $c \geq 1$ și deci $a \geq 2$. Din $a + b + c > 0$ deducem $a + b + c \geq 1$ adică $-b \leq a + c - 1 \leq 2a - 2$. Din $b^2 - 4ac > 0$ avem $b^2 \geq 4ac + 1$ însă din $0 < -b \leq 2a - 2$ deducem $b^2 \leq (2a - 2)^2$ așa încît $4a^2 - 8a + 4 \geq 4ac + 1$

sau $c \leqslant a - 2 + \frac{3}{4a}$ adică $c \leqslant a - 2$ și deci $a \geqslant 3$ și $-b \leqslant$ $\leqslant 2a - 3$ adică $4ac + 1 \leqslant b^2 \leqslant 4a^2 - 12a + 9$ ceea ce conduce la $c \leqslant a - 3 + \frac{2}{a}$. Cum $a \geqslant 3$ și $c \in N$ rezultă $c \leqslant a - 3$ și deci $a \geqslant 4$ și $-b \leqslant 2a - 4$ de unde $4ac + 1 \leqslant$ $\leqslant b^2 \leqslant 4a^2 - 16a + 16$ și deci $c \leqslant a - 4 + \frac{15}{4a}$. Deoarece $a \geqslant 4$ rezultă $c \leqslant a - 4$ adică $a \geqslant 5$. Luînd $a = 5$ avem $1 \leqslant c \leqslant a - 4$ și deci $c = 1$. Cum $b^2 \geqslant 4ac + 1$ avem $b^2 \geqslant 21$ și deci $-b \geqslant \sqrt{21}$. Din $-b \leqslant a + c - 1$ deducem $-b \leqslant 5$ și deci $\sqrt{21} \leqslant -b \leqslant 5$ adică $-b = 5$.

Ecuația este $5x^2 - 5x + 1 = 0$.

3. Avem $a(n-1)^2 + b(n-1) + c = p$

$$an^2 + bn + c = q$$

$$a(n+1)^2 + b(n+1) + c = r, \quad m, p, q, e \in Z,$$

și deducem de aici $a(2n+1) + b = r - q$ și deci

$$a(2n-1) + b = q - p$$

$$a = \frac{r+p}{2} - q \quad b = r - q - (2n+1)\left(\frac{r+p}{2} - q\right) =$$

$$= r - q - n(r+p) + q(2n+1) - \frac{r+p}{2}.$$

Notăm $r - q - n(r+p) + q(2n+1) = s$ și deci

$$b = s - \frac{r+p}{2}$$

$$c = q - \left(\frac{r+p}{2} - q\right)n^2 - \left(s - \frac{r+p}{2}\right)n = q + qn^2 - sn -$$

$$- (r+p)\frac{n(n-1)}{2}.$$

Cum $n(n-1)$ se sivide la 2 rezultă $c \in Z$ și deci

$$f(x) = \left(\frac{r+p}{2} - q\right)x^2 + \left(s - \frac{r+p}{2}\right)x + c$$

Fie $u \in Z$, $f(u) = (r+p) \cdot \frac{u(u-1)}{2} - qu^2 + su + c$.

$u(u-1)$ se divide la 2 și deci $f(u) \in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Dacă $x_3 = x_1$ considerăm $f(x) = \sqrt{2}(x-x_1)(x-x_2)$. Avem $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ însă $f(k) \notin Z$ pentru $k \in Z - \{x_1, x_2\}$. Așadar numerele x_1, x_2, x_3 trebuie să fie diferite. Considerăm $x_1 < x_2 < x_3$ și luăm $f(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$. Avem $f(x_1) = f(x_2) = 0, f(x_3) = 1$. Este necesar să avem: $f(1+x_1) \in Z, f(1+x_2) \in Z$ adică

$$\frac{1+x_1-x_2}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \in Z; \quad \frac{1+x_2-x_1}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \in Z \text{ și deci}$$

$$\frac{(1+x_1-x_2)+(1+x_2-x_1)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{2}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \in Z.$$

Cum $x_3 - x_2 \geqslant 1$ și $x_3 - x_1 \geqslant 2$ rezultă $x_3 = 1 + x_2$, $x_3 = 2 + x_1$ adică numerele x_1, x_2, x_3 sînt consecutive. Sufiçiența acestei condiții rezultă din problema precedentă.

5. Fie $P(x) = mx^2 + nx + p$. Cum $P(0) \in Z \Rightarrow p \in Z$. Din $P(1) \in Z$ și $P(-1) \in Z$ rezultă $m + n + p \in Z$ și $m - n + p \in Z$ adică $m + n + p = k$, $m - n + p = h$, $k, h \in Z$ și deci $m = \dfrac{k+h-2p}{2}$, $n = \dfrac{k-h-2p}{2}$.

Punînd $k - 2p = b$ și $p = c$, $b + h = a$ obținem $P(x) = \dfrac{ax^2}{2} + \dfrac{(2b-a)x}{2} + c$ adică $P(x) = \dfrac{1}{2}\left[ax^2 + (2b-a)x + 2c\right]$.

Reciproc: fie $P(x) = \dfrac{1}{2}[ax^2 + (2b - a)x + 2c] = \dfrac{ax(x-1)}{2} + bx + c$.

Cum $a, b, c \in Z$ și $n(n-1)$ se divide cu 2 pentru orice $n \in Z$ rezultă $P(n) \in Z$ pentru orice $n \in Z$.

6. a) Presupunem că există numerele $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \overline{0, p-1}$ astfel ca $p \mid f(x_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$.
Din $p \mid f(x_1)$ și $p \mid f(x_2)$ rezultă $p \mid f(x_1) - f(x_2)$ adică

$$p \mid (x_1 - x_2)\left[a_0(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + a_1(x_1 + x_2) + a_2\right].$$

Cum $|x_1 - x_2| < p$ rezultă $p \mid a_0(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + a_1(x_1 + x_2) + a_2$. Analog se arată că $p \mid a_0(x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2) + a_1(x_1 + x_3) + a_2$ și deci

$$p \mid a_0(x_1x_2 + x_2^2 - x_1x_3 - x_3^2) + a_1(x_2 - x_3)$$

Scanned with OKEN Scanner

adică $p \mid (x_2 - x_3)\,[a_0(x_1+x_2+x_3)+a_1]$ dar $|x_2 - x_3| < p$ și deci $p \mid a_0(x_1 + x_2+x_3)+a_1$. Analog $p \mid a_0(x_1+x_2+x_4)+a_1$ și deci $p \mid a_0(x_3 - x_4)$. Din $|x_3 - x_4| < p$ se deduce $p \mid a_0$ ceea ce contrazice ipoteza.

b) Din demonstrația de la punctul a) rezultă $p \mid a_0$ care împreună cu $p \mid a_0(x_1 + x_2 + x_3) + a_1$ conduce la $p \mid a_1$. Cum $p \mid a_0(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + a_1(x_1 + x_2) + a_2$ rezultă $p \mid a_2$ și în sfîrșit din $p \mid a_0x_1^3+a_1x_1^2+a_2x_1+a_3$ rezultă $p \mid a_3$.

7. Pentru $c = 0$ rezultă $b = 0$ și ecuația are soluțiile $0, 0, -a$. Fie $c \neq 0$, $b^2 = c(2a - 3) \Rightarrow (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = 3x_1x_2x_3 \Rightarrow x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2 = 3x_1x_2x_3$. (1) Dar $\frac{x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2}{3} \geqslant \sqrt[3]{x_1^4x_2^4x_3^4}$ și deci $x_1x_2x_3\sqrt[3]{x_1x_2x_3} \leqslant x_1x_2x_3$. Din (1) rezultă $x_1x_2x_3 > 0$ deci $\sqrt[3]{x_1x_2x_3} \leqslant 1$. Cum $x_1, x_2, x_3 \in Z - \{0\}$ rezultă $x_1x_2x_3 = 1$. Avem: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ și deci $a = -3$, $b = 3$, $c = -1$ sau $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = -1$ și deci $a = 1$, $b = -1$, $c = -1$.

8. Fie w rădăcina comună: avem relațiile $w^3 + 2w^2 + aw + b = 0$; $w^3 - w^2+bw+a = 0$. Prin scădere obținem: $3w^2 + (a - b)(w - 1) = 0$. Cum $w = 1$ nu verifică simultan ecuațiile date avem $w \neq 1$ și deci

$$b - a = \frac{3w^2}{w-1} = 3(w + 1) + \frac{3}{w-1} \in Z;$$ adică $w - 1 = \pm 1$;

$$w - 1 = \pm 3.$$

a) $w = 0 \Rightarrow a = 0, \quad b = 0$

b) $w = 2 \Rightarrow 2a + b = -16$ și $2b + a = -4 \Rightarrow a, b \notin Z$

c) $w = -2 \Rightarrow -2a + b = 0$ și $-2b + a = 12 \Rightarrow a = -4, \quad b = -8$

d) $w = 4 \Rightarrow 4a + b = -96$ și $4b + a = -48 \Rightarrow a, b \notin Z$.

9. Presupunem că avem identitatea

$x^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 + mx + n)(x + p)$, $m, n, p \in Z$.

Identificînd coeficienții avem:

$$p + m = b$$
$$mp + n = c$$
$$np = d$$

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $d(b+c)$ este impar rezultă că d este impar și $b+c$ este impar. Cum d este impar rezultă $n=2s+1$, $p=2t+1$, $b+c=p+n+m(p+1)=2t+1+2s+1+m(2t+2)=2[t+s+1+m(t+1)]$, ceea ce contrazice faptul că $b+c$ este impar.

Așadar polinomul nu este decompozabil în $Z[x]$.

10. Fie $P\in Q[x]$. Avem $P(x)=R(x)(x^3-2)+ax^2+bx+c$, $a, b, c\in Q$. Cum $P(\sqrt[3]{2})=0$ avem $a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c=0$ (1).

Înmulțind (1) cu $\sqrt[3]{2}$ găsim $b\sqrt[3]{4}+c\sqrt[3]{2}+a=0$. (2)

Eliminînd pe $\sqrt[3]{4}$ din (1) și (2) găsim $(b^2-ac)^3\sqrt[3]{2}=2a^2-bc$. (3)

Dacă $b^2-ac\neq 0$ atunci obținem contradicția $\sqrt[3]{2}=\frac{2a^2-bc}{b^2-ac}\in Q$.

Dacă $b^2-ac=0$ atunci $2a^2-bc=0$.

Pentru $a=0$ (1) devine $b\sqrt[3]{2}+c=0$ și deci $b=0$, $c=0$. Pentru $a=0$ avem $c=\frac{b^2}{a}$ și $2a^2-\frac{b^3}{a}=0$ adică $\frac{b}{a}=\sqrt[3]{2}$ și deci contradicție pentru că $\frac{b}{a}\in Q$. Așadar, $a=b=c=0$ și deci $P(x)=R(x)(x^3-2)$.

Observație. Rezultă imediat că polinoamele cu coeficienții rationali de grad minim care admit pe $\sqrt[3]{2}$ ca rădăcină sînt $P(x)=a(x^3-2)$, $a\in Q$.

11. Pentru $b=0$, avem ecuația $x^2(x-a)=0$ cu soluțiile 0, 0, a. Pentru $b\neq 0$ avem $x_i\neq 0$ și scriem relațiile lui *Viète*

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b$$

$$x_1x_2x_3=b$$

și deci

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=1 \text{ de unde } x_3=\frac{x_1x_2}{x_1x_2-x_1-x_2}=1+\frac{x_1+x_2}{x_1x_2-x_1-x_2}.$$

Deoarece $x_1+x_3\neq 0$ și $\frac{x_1+x_2}{x_1x_2-x_1-x_2}\in N$ rezultă $x_1+x_2\geq x_1x_2-x_1-x_2$ adică $(x_1-2)(x_2-2)\leq 4$

și deci $x_1, x_2 \leqslant 6$. Pentru $x_1 = 1$ obținem $x_3 = 1 + \frac{1 + x_2}{x_2 - 1 - x_2} =$ $= -x_2$ deci contradicție. Pentru $x_1 = 2$, $x_3 = 1 + \frac{2 + x_2}{x_2 - 2} =$ $= 2 + \frac{4}{x_2 - 2}$ și deci $x_2 - 2 \mid 4$ dacă $x_2 = 1$ atunci $x_3 < 0$ dacă $x_2 = 3$ rezultă $x_3 = 6$; dacă $x_2 = 4$ atunci $x_3 = 4$ și pentru $x_2 = 6$ rezultă $x_3 = 3$. Pentru $x_1 = 3$, $x_3 =$ $= 1 + \frac{3 + x_2}{2x_2 - 3}$. Cum $\frac{x_2 + 3}{2x_2 - 3} \in N$ rezultă $\frac{2x_2 + 6}{2x_2 - 3} \in N$ și deci $1 + \frac{9}{2x_2 - 3} \in N$, adică $2x_2 - 3 \mid 9$. Pentru $x_2 = 2$ avem $x_3 = 6$. Pentru $x_2 = 3$ rezultă $x_3 = 3$, iar pentru $x_2 = 6$ avem $x_3 = 2$. Încercînd și cazurile $x_1 = 4, 5, 6$ găsim aceleași soluții adică $(3, 3, 3)$; $(2, 3, 6)$; $(2, 4, 4)$.

12. Dacă $x_1 = \frac{p}{q}$ este o rădăcină rațională a ecuației $(p, q \in Z)$ atunci $p \mid d$ și $q \mid a$ și deci p și q sînt impare.

Presupunem că toate rădăcinile sînt raționale $x_i = \frac{p_i}{q_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ unde p_i și q_i sînt impare. Cum bc este par rezultă că cel puțin unul din numerele b și c este par. Dacă b este par avem:

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \frac{p_3}{q_3} = -\frac{b}{a} \text{ și deci}$$

$$a(p_1q_2q_3 + p_2q_1q_3 + p_3q_1q_2) = -b \cdot q_1q_2q_3,$$

egalitate imposibilă fiind că în primul membru avem un număr impar, iar în membrul al doilea un număr impar. Analog se ajunge la contradicție dacă c este par. Așadar, cel puțin o rădăcină este irațională.

13. a) Considerăm $n \geqslant 3$. Avem $4^n = (1 + 3)^n = 1 +$ $+ C_n^1 3 + C_n^2 3^2 + C_n^3 3^3 + \ldots + 3^n = 1 + 3n + \frac{9n(n-1)}{2} + \mathfrak{M}\,27.$

Așadar, $4^n + P(n) \vdots 27$ dacă $1 + 3n + \frac{9n(n-1)}{2} + P(n) \vdots 27.$

Scanned with OKEN Scanner

Dar $1+3n+\frac{9n(n-1)}{2}=\frac{27m(n-1)}{2}-9n(n-1)+3n+1=$
$=27\frac{n(n-1)}{2}-(9n^2-12n-1)$ dar $\frac{n(n-1)}{2}\in N$ și deci
$27\frac{n(n-1)}{2}\vdots 27$. Condiția se reduce la $P(n)-(9n^2-12n-1)\vdots 27$.

Putem lua $P(x)=9x^2-12x-1$. Pentru $n\geqslant 3$ proprietatea este demonstrabilă iar pentru $n=0,\ 1,\ 2$ avem $P(0)=0,\ P(1)=0,\ P(2)=27$.

b) Presupunem $P(x)=ax+b,\quad a,b\in Z$. Condiția necesară $P(n)-(9n^2-12n-1)\vdots 27$ devine $9n^2-n(12+a)-1+b\vdots 27\ \forall n\geqslant 3$. Pentru $n=27$ rezultă $b-1\vdots 27$ și deci $b-1=27k$. Așadar rămîne condiția $9n^2-n(12+a)\vdots 27$. Pentru $n=3$ rezultă $-3(a+12)\vdots 27$ deci $a+12=9k$ și deci $9n(n-k)\vdots 27$ adică $n(n-k)\vdots 3$. Pentru $n=4,\ 5$ avem $4(4-k)\vdots 3;\ 5(5-k)\vdots 3$ și deci $4(4-k)+5(5-k)\vdots 3$ adică $41-9k\vdots 3$ și deci $41\vdots 3$ ceea ce este absurd. Așadar, P are gradul cel puțin 2.

14. Fie $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$.

Presupunem $a=b$. $P(x)=(x-a)^2(x-c)(x-d)+1$. $P(d-1)=-(d-1-a)^2(d-1-c)+1\geqslant 0$, și deci $d-c-1\leqslant 1$ adică $d-c\leqslant 2$.

1°. Dacă $d=c$, $P(x)=(x-a)^2(x-c)^2+1$ evident nu verifică condiția.

2°. Dacă $d=c+2$, $P(d-1)=-(d-1-a)^2+1\geqslant 0$ și deci $d=a+2$ și $P(x)=(x-a)^3(x-a-2)+1$, $P(a-2)=33\neq k^2$.

3°. Dacă $d=c+1$, $P(x)=(x-a)^2(x-c)(x-c-1)+1$.

Fie p prim, $p>c-a+2$.

$$P(a+p)=p^2(a+p-c)(c+p-c+1)+1,\quad c-a=\alpha.$$

$$P(a+p)=p^2(p-\alpha)(p-\alpha-1)+1=l^2;$$

$p^2(p-\alpha)(p-\alpha-1)=l^2-1$, $l-1$ și $l+1$ nu au factor pe p.

Fie $p^2\mid l+1\Rightarrow l+1=kp^2\Rightarrow(p-\alpha)(p-\alpha)-1=\frac{l-1}{k}$

$$p^2-p(2\alpha+1)+\alpha(\alpha+1)=\frac{kp^2-2}{k}\Rightarrow p(2\alpha+1)=\alpha(\alpha+1)+$$

$$+\frac{2}{k}\leqslant\alpha^2+\alpha+2$$

$$p<\frac{\alpha^2+\alpha+2}{2\alpha+1}<\alpha+2=c-a+2.$$

Scanned with OKEN Scanner

Analog pentru $p^2 \mid l - 1$. Deci $a = b$ este imposibil.

Dacă $b \geq a+2$, $P(a+1) = (a+1-b)(a+1-c)(a+1+d) + 1 \geq 0 \Rightarrow b = c = d = a+2$

$P(x) = (x-a)(x-a-2)^3 + 1$; $\quad P(a+4) = 33 = k^2$

deci $b = a+1$.

Punînd $Q(x) = P(-x) = (x+a)(x+b)(x+c)(x+d) + 1 = [x-(-d)][x-(-c)][x-(-b)][x-(-a)] + 1$

cu $-d \leqslant -c \leqslant -b \leqslant -a$ rezultă $-c = -d + 1$ și deci $d = c+1$. Așadar

$$P(x) = (x-a)(x-a-1)(x-c)(x-c-1) + 1.$$

Punînd $y = x^2 - x(a+c+1) + ac + a$ avem $Q(y) = y^2 + y(c-a) + 1$.

Avem $Q(s) = K_s^2$ pentru o infinitate de valori ale lui $s \in Z$.

Pentru $c - a \leqslant 1$; $y^2 < y^2 + y(c-a) + 1 < (y+1)^2$; dacă $c - a \geqslant 3$, pentru

$$y > \left(\frac{c-a}{2}\right)^2; \quad \left(y + \frac{c-a}{2} - 1\right)^2 < Q(y) < \left(y + \frac{c-a}{2}\right)^2 \text{ și}$$

$$\left(y + \frac{c-a-1}{2}\right)^2 < Q(y) < \left(y + \frac{c-a+1}{2}\right)^2$$

deci $Q(s)$ nu este pătrat perfect pentru s suficient de mare. Așadar, $c - a = 2$.

Avem $P(x) = (x-a)(x-a-1)(x-a-2)(x-a-3)^2 + 1 = [x^2 - x(2a+3) + a^2 + 3a + 1]^2$. Condiția este și suficientă.

15. Dacă $d = 0$ avem $x_3 = 0$ și $x^3 - ax^2 - c = 0$ și deci $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$ ceea ce este imposibil fiindcă $x_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. Dacă $d \neq 0$ din relațiile lui *Viète* avem:

$$\text{(1)} \qquad \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)\left(\frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right) + \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_3x_4} = b.$$

Punem $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ și deci $x_1 \geqslant 1$, $x_2 \geqslant 2$, $x_3 \geqslant 3$, $x_4 \geqslant 4$ și deci $b \leqslant \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{35}{24}$

adică $b = 1$.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $x_1 \geqslant 2$ atunci $x_2 \geqslant 3$; $x_3 \geqslant 4$, $x_4 \geqslant 5$ și avem: contradicția $1 \leqslant \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{6}+\frac{1}{20}=\frac{71}{120}$ deci $x_1 = 1$; egalitatea (1) devine:

$$\left(1+\frac{1}{x_2}\right)\left(\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3x_4}=1. \tag{2}$$

Dacă $x_2 \geqslant 3$ atunci $x_3 \geqslant 4$, $x_4 \geqslant 5$ și avem contradicția: $1 \leqslant \left(1+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{3}+\frac{1}{20}=\frac{59}{60}$ și deci $x_2 = 2$; atunci $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)+\frac{1}{2}+\frac{1}{x_3x_4}=1$ adică $(x_3-3)(x_4-3)=11$ și deci $x_3-3=1$, $x_4-3=11$. Soluțiile sînt 1, 2, 4, 14.

16. Ecuația se scrie $x^4-2x^3+x^2-x^2+x-a=0$ adică $(x^2-x)^2-(x^2-x)-a=0$.

Punînd $x^2-x=y$ avem:

$$y^2-y-a=0 \text{ și deci } y_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2} \text{ adică}$$

$x^2-x=\frac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$. Deducem de aici: $4x^2-4x+1=2(1\pm\sqrt{1+4a})+1$ sau încă: $(2x-1)^2=3\pm2\sqrt{1+4a}$. Rezultă în final: $x=\frac{1\pm\sqrt{3\pm2\sqrt{1+4a}}}{2}$.

Pentru ca rădăcinile să fie întregi trebuie ca $1+4a=(2k+1)^2$ deci $a=k(k+1)$, $k\in Z$, și $3+2(4k+1)=h^2$; $3-2(4k+1)=l^2$, $h, l \in Z$, adică $8k+5=h^2$ și $1-8k=l^2$ și deci $8k+5\geqslant 0$, $1-8k\geqslant 0$ adică $k\in\left[-\frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right]$. Cum $k\in Z$ rezultă $k=0$ și deci $h^2=5$ ceea ce contrazice $h\in Z$.

17. Polinomul este reductibil în cazurile:

$P(1)=0$ adică $a+b=-2$

$P(-1)=0$ adică $a-b=-2$ și

$P(x)\equiv(x^2+mx+n)(x^2+px+q)$, $m, n, p, q \in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem sistemul: $m + p = 0$, $n + pm + q = 1$, $mq + np = b$, $nq = 1$. Din $m + p = 0$ și $nq = 1$ deducem:

a) $p = -m$ $n = 1$ $q = 1$ și deci $a = 2 - m^2$, $b = 0$

b) $p = -m$ $n = 1$ $q = -1$ și deci $a = -2 - m^2$, $b = 0$, $m \in Z$.

18. Avem: $P(x) = (x - \sqrt{3} - \sqrt{2})(x - \sqrt{3} + \sqrt{2})(x + \sqrt{3} - \sqrt{2})(x + \sqrt{3} + \sqrt{2}) = [(x - \sqrt{3})^2 - 2][(x + \sqrt{3})^2 - 2] = (x^2 - 2\sqrt{3}x + 1)(x^2 + 2\sqrt{3}x + 1) = (x^2 + 1)^2 - 12x^2 = x^4 - 10x^2 + 1$.

Evident P are coeficienți raționali și are rădăcina $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. Vom arăta că nu există un polinom de grad mai mic cu proprietățile cerute.

Presupunem $a(\sqrt{3} + \sqrt{2})^3 + b(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + c(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + d = 0$. Înmulțind cu $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ avem: $a(5 + 2\sqrt{6}) + b(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + c + d(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 0$ adică: $2a\sqrt{6} + \sqrt{3}(b + d) + \sqrt{2}(b - d) + 5a + c = 0$. (1)

Vom arăta că dacă $x, y, z, w \in Q$ și

$x\sqrt{6} + y\sqrt{3} + z\sqrt{2} + w = 0$ (2) atunci $x = y = z = w = 0$.

Avem $y\sqrt{3} + z\sqrt{2} = -(w + x\sqrt{6})$ și deci $3y^2 + 2z^2 + 2\sqrt{6}yz = w^2 + 6x^2 + 2\sqrt{6}xw$ adică $2\sqrt{6}(xw - yz) = 3y^2 + 2z^2 - w^2 - 6x^2$. Dacă $xw - yz \neq 0$ atunci se obține contradicția $\frac{3y^2 + 2z^2 - w^2 - 6x^2}{xw - yz} = 2\sqrt{6} \in Q$ deci $xw = yz$ și $2y^2 + 2z^2 = w^2 + 6x^2$.

Rezultă de aici $3y^2 + 2z^2 - 2\sqrt{6}yz = w^2 + 6x^2 - 2\sqrt{6}xw$ adică $(y\sqrt{3} - z\sqrt{2})^2 = (w - x\sqrt{6})^2$ și deci

$$y\sqrt{3} - z\sqrt{2} + w - x\sqrt{6} = 0 \quad (3) \quad \text{sau}$$

$$y\sqrt{3} - z\sqrt{2} - w + x\sqrt{6} = 0 \quad (4)$$

Din (2) și (3) obținem $y\sqrt{3} + w = 0$ și $z\sqrt{2} + x\sqrt{6} = 0$ și deci $x = y = z = w = 0$.

Din (2) și (4) obținem: $y\sqrt{3} + x\sqrt{6} = 0$ și $w + z\sqrt{2} = 0$ și deci $x = y = z = w = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd rezultatul la relația (1) se obține $2a = 0$, $b + d = 0$, $b - d = 0$, $5a + c = 0$ și deci $a = b = c = d = 0$. Deci gradul minim este patru. Polinoamele de grad patru cu proprietatea cerută sînt

$$Q(x) = a(x^4 - 10x^2 + 1),\ a \in Q.$$

19. Polinomul cu coeficienți raționali de grad minim care admite una din aceste rădăcini este $P(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ (vezi problema 18). Așadar, orice polinom care are ca rădăcină unul din cele patru numere, se divide la $P(x)$ și deci admite ca rădăcini și pe celelalte trei.

20. Deoarece coeficientul dominant este 1 polinomul nu admite rădăcini fracționare. Polinomul nu admite nici rădăcini întregi deoarece $P(k) = k^5 - k + m = \mathcal{M}\ 5 + m$. Cum a nu se divide cu 5, $P(k) = \neq \mathcal{M}\ 5$, $(\forall)\ k \in Z$ și deci $P(k) \neq 0$; deci $P(x)$ nu are factori de grad 1. Presupunem $P(x) = (x^3 + ax^2 + bx + c)(x^2 + px + q)$. Identificînd coeficienții găsim: $p = -a$, $q = a^2 - b$; $c = 2ab - a^3$; $a^4 + 1 = b(a^2 + b)$; $a(2b - a^2)\ (a^2 - b) = m$. Cum $m \not\equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow a \not\equiv 0 \pmod 5$; $a^2 - 2b \not\equiv 0 \pmod 5$; $a^2 - b \not\equiv 0 \pmod 5$. Cum $a^5 \equiv a \pmod 5$ și $a \not\equiv 0 \pmod 5$ rezultă $a^4 \equiv 1 \pmod 5$ și deci din $b(a^2 + b) = a^4 + 1$ rezultă $b(a^2 + b) \equiv 2 \pmod 5$ (1)

Din $a^2 - 2b \not\equiv 0 \pmod 5$ $a^2 - b \equiv 0 \pmod 5$ rezultă: $(a^2 - 2b)\ (a^2 - b) \not\equiv 0 \pmod 5$ sau $a^4 - 3ba^2 + 2b^2 \equiv a^4 + 2a^2b + 2b^2 \not\equiv 0 \pmod 5$. Cum $a^4 \equiv 1 \equiv (-4) \pmod 5$ rezultă $-4 + 2a^2b + 2b^2 \not\equiv 0 \pmod 5$ adică $b(a^2 + b) \not\equiv 2 \pmod 5$ ceea ce contrazice relația (1).

Așadar $P(x)$ este ireductibil în $Z(x)$.

21. Polinomul se mai scrie:

$$P(x) = x(C_n^0 x^{2n} + C_n^1 x^{2n-2} + \ldots + C_n^n x^0) = x(x^2 + 1)^n.$$

22. Avem $P(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^n) - x^2 - x^3 - \ldots - x^n - x^{n+1} - x^{n+2} + x^{n+1} + x^{n+2} + x^{n+3} + x^{n+4} + \ldots + x^{2n+1} = (1 + x + x^2 + \ldots + x^n) - x^2(1 + x + x^2 + \ldots + x^n) + x^{n+1}(1 + x + x^2 + \ldots + x^n) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^n)\ (1 - x^2 + x^{n+1})$.

Scanned with OKEN Scanner

23. Pentru $x \neq 1$ avem $P(x) = \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)^2 - x^n =$
$= \frac{x^{2n+2} - 2x^{n+1} + 1}{(x-1)^2} - x^n = \frac{x^{2n+2} + 1 - x^{n+2} - x^n}{(x-1)^2} =$
$= \frac{(x^n-1)(x^{n+2}-1)}{(x-1)^2}$. Așadar:
$P(x) = (x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)(x^{n+1} + x^n + \ldots + x + 1)$.
Identitatea este evident adevărată și pentru $x = 1$.

24. Se observă că $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{(n+1)!}$.
Vom demonstra prin inducție că
$P_{n+1}(x) = \frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)}{(n+1)!}$; $P_1(x) = 1 + x = \frac{x+1}{1!}$.

Presupunem $P_n(x) = \frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}{n!}$.
$P_{n+1}(x) = \frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}{n!} + \frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{(x+1)!} =$
$= \frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}{n!}\left(1 + \frac{x}{n+1}\right) = \frac{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)}{(n+1)!}$
ceea ce trebuia demonstrat.

25. Polinomul $P(x)$ se mai scrie:
$P(x) = [(x^n - x - 2) + x]^n - x - 2 = (x^n - x - 2)^n +$
$+ C_n^1(x^n - x - 2)^{n-1}x + \ldots + C_n^{n-1}(x^n - x - 2)x^{n-1} +$
$+ x^n - x - 2 = (x^n - x - 2)Q(x)$
unde $Q(x)$ este un polinom cu coeficienți întregi.

26. $P(x) = [n(x^m - 1) - m(x^n - 1)] = (x-1)[n(x^{m-1} +$
$+ x^{m-2} + \ldots + x + 1) + m(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)]$
sau $P(x) = (x-1)[n(x^{m-1} - 1) + n(x^{m-2} - 1) + \ldots +$
$+ n(x-1) + n + n(m-1) - m(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)] =$
$= (x-1)[n(x^{m-1} - 1) + n(x^{m-2} - 1) + \ldots + n(x-1) -$
$- m(x^{n-1} - 1) - m(x^{n-2} - 1) - \ldots - m(x-1)] =$
$= (x-1)^2[n(x^{m-2} + x^{m-3} + \ldots + x + 1) + n(x^{m-3} + x^{m-4} +$
$+ \ldots + x + 1) + \ldots + n - m(x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x + 1) -$
$- m(x^{n-3} + x^{n-4} + \ldots + x + 1) - m] = (x-1)^2[nx^{m-2} +$
$+ 2nx^{m-3} + 3nx^{m-4} + \ldots + n(m-1) - mx^{n-2} - 2mx^{n-3} -$
$- 3mx^{n-4} - \ldots - m(n-1)]$.

Scanned with OKEN Scanner

27. Rădăcinile polinomului $x^{2n} + x^n + 1$ se obțin din $x^n = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ și deci $x = \cos \frac{2(3k+1)}{3n} \pm i \sin \frac{2(3k+1)}{3n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Este suficient să avem:

$$\left[\cos \frac{2(3k+1)}{3n} + i \sin \frac{2(3k+1)}{3n}\right]^m - 1 = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

și deci $\cos \frac{2m(3k+1)}{3n} = 1$ și $\sin \frac{2m(3k+1)}{3n} = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$

adică $\frac{2m(3k+1)}{3n} = 2h_k\pi$; de unde $m = \frac{3h_k n}{3k+1}$.

Pentru $k = 0$ avem $m = 3h_0 n$. Această condiție necesară și suficientă deoarece

$x^m - 1 = x^{3h_0 n} - 1 = (x^{3n})^{h_0} - 1 = (x^{3n} - 1)[x^{3n(h_0-1)} + x^{3n(h_0-2)} + \ldots 1]$ și $x^{3n} - 1 = (x^n - 1)(x^{2n} + x^n + 1)$.

Așadar m este multiplu de $3n$.

28. Rădăcinile ecuației $x^2 - x + 5 = 0$ sînt $x = \frac{1 \pm i\sqrt{19}}{2}$.

Este necesar și suficient să avem $P\left(\frac{1 + i\sqrt{19}}{2}\right) = 0$ adică

$$\left(\frac{-1 + i\sqrt{19}}{2}\right)^n + \left(\frac{9 + i\sqrt{19}}{2}\right)^m = 0. \tag{1}$$

Dar $\frac{-1 + i\sqrt{19}}{2} = \sqrt{5}(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ și $\frac{9 + i\sqrt{19}}{2} = 5(\cos \beta + i \sin \beta)$ unde

$$\cos \alpha = \frac{-1}{2\sqrt{5}}; \quad \sin \alpha = \frac{19}{2\sqrt{5}}; \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ și}$$

$$\cos \beta = \frac{9}{10}; \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{19}}{10}; \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

Relația (1) devine $(\sqrt{5})^m (\cos m\alpha + i \sin m\alpha) + 5^n(\cos n\beta + i \sin n\beta) = 0$, adică $(\sqrt{5})^m \cos m\alpha + 5^n \cos n\beta = 0$ și $(\sqrt{5})^m \sin m\alpha + 5^n \sin n\beta = 0$, deci

$$(\sqrt{5})^m \cos m\alpha = -5^n \cos n\beta$$
$$(\sqrt{5})^m \sin m\alpha = -5^n \sin n\beta \tag{3}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ridicînd la pătrat și adunînd relațiile 3) obținem: $5^m(\cos^2 m\alpha + \sin^2 m\alpha) = 5^{2n}(\cos^2 n\beta + \sin^2 n\beta)$ și deci $5^m = 5^{2n}$ adică $m = 2n$. Relațiile (3) devin: $\cos 2n\alpha = -\cos n\beta$ $\sin 2n\alpha = -\sin n\beta$ și deci $2n\alpha - n\beta = (2k+1)\pi$ adică $2\alpha - \beta = \frac{(2k+1)\pi}{n}$.

Utilizînd relațiile (2) se arată că $\frac{\pi}{2} < 2\alpha - \beta < 2\pi$ și $\cos(2\alpha - \beta) = -1$ deci $2\alpha - \beta = \pi$. Rezultă $n = 2k+1$ și $m = 2(2k+1)$ $k \in Z$.

29. Avem de studiat cazurile:

a) $n = 3(2k+1)$; $P(x) = [(x+a)^3]^{2k+1} + 1 = [(x+a)^3 + 1] \cdot [(x+a)^{6k} + (n+a)^{6k-3} + \ldots + (x+a)^3 + 1] = (x+a+1)[(x+a)^2 - (x+a) + 1] \cdot [(x+a)^{6k} + (x+a)^{6k-3} + \ldots + (x+a)^3 + 1]$

Polinomul căutat este $Q(x) = (x+a)^2 - (x+a) + 1 = x^2 + (2a-1)x + a^2 - a + 1$ care este ireductibil în $Z[x]$ avînd rădăcinile complexe $x_{1,2} = \frac{1 - 2a \pm i\sqrt{3}}{2}$.

b) $n = 6(2k+1) = 2h$ (h impar).

$P(x) = [(x+1)^2]^h + 1 = [(x+a)^2 + 1][(x+a)^{h-2} + (x+a)^{2h-4} + \ldots + 1]$ și $Q(x) = x^2 + 2ax + a^2 + 1$.

30. Evident $m \geqslant n$. Pentru $m = n$, $P(x)$ se divide la $Q(x)$. Este necesar ca orice rădăcină lui $Q(x)$ și fie rădăcină pentru $P(x)$.

Fie α rădcină lui $Q(x)$

(1) $$\alpha^{n+1} + \alpha^n + 1 = 0$$

Avem și

$$\alpha^{m+1} + \alpha^m + 1 = 0$$

(2) $$\alpha^{m+1}(\alpha^{m-n} - 1) + \alpha^m(\alpha^{n-m} - 1) = 0$$

$$\alpha^m(\alpha^{n-m} - 1)(\alpha + 1) = 0$$

$\alpha = 0$ nu convine

$\alpha = -1$ nu convine

Deci $$\alpha^{n-m} = 1$$

$$|\alpha|^{n-m} = 1 \Rightarrow |\alpha| = 1$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci toate rădăcinile lui $Q(x)$ au modulul 1. Relația (1) se mai scrie $\alpha(\alpha^n + 1) = -1$

$$\alpha^n = \frac{-1}{\alpha + 1} \quad |\alpha^n| = \frac{1}{|\alpha + 1|}$$

$$1 = \frac{1}{|\alpha + 1|} \quad |\alpha + 1| = 1$$

Fie $\alpha = u + vi$. Avem $u^2 + v^2 = 1$; $(u + 1)^2 + v^2 = 1$. Din ultimele 2 relații, prin scădere avem

$$2u + 1 = 0, \quad u = -\frac{1}{2}$$

și $v = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Deci $Q(x)$ are rădăcinile: $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Aceste rădăcini sînt simple pentru că $Q(x)$ și $Q'(x)$ nu au rădăcini comune. Deci $Q(x) = x^2 + x + 1$; $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ adică $\alpha^3 = 1$. Considerăm $m = 3k$:

$$P(\alpha) = \alpha^{3k}\alpha + \alpha^{3k} + 1 = \alpha + 2 \neq 0;$$

$$m = 3k + 1,$$

$$P(\alpha) = \alpha^{3k}\alpha^2 + \alpha^{3k}\alpha + 1 = \alpha^2 + \alpha + 1 = 0;$$

$$m = 3k + 2 \Rightarrow P(\alpha) = \alpha^2 + 2 \neq 0.$$

Deci $P(x)$ se divide la $Q(x)$ dacă: 1) $m = n$; 2) $n = 1$ și $m = 3k + 1$.

31. Avem: $P(x) = (x^m + x^n)^2 - 2x^{m+n} + 1 = (x^m + x^n)^2 - 1 - 2(x^{m+n} - 1) = (x^m + x^n + 1)(x^m + x^n - 1) - 2(x^{m+n} - 1) = Q(x)(x^m + x^n - 1) - 2(x^{m+n} - 1)$.

Dacă $P(x)$ se divide la $Q(x)$ atunci $R(x) = x^{m+n} - 1$ se divide la $Q(x)$ și deci $R(x) + Q(x) = x^{m+n} + x^m + x^n$ se divide la $Q(x)$. Presupunem $m \geq n$. $R(x) + Q(x) = x^m(x^m + x^{m-n} + 1)$. Cum x^n este prim cu $Q(x)$ rezultă că $x^m + x^{m-n} + 1$ se divide cu $Q(x)$ și avînd același grad rezultă $m - n = n$ deci $m = 2m$. Presupunînd că $n \geq m$ va rezulta $n = 2m$. Aceste condiții sînt suficiente. Într-adevăr, dacă $m = 2n$, $P(x) = x^{4n} + x^{2n} + 1 = (x^{2n} + 1)^2 - x^{2n} = (x^{2n} + x^n + 1)(x^{2n} - x^n + 1) = Q(x) \cdot (x^{2n} - x^n + 1)$ și deci $P(x)$ se divide la $Q(x)$. Analog pentru $n = 2m$.

Scanned with OKEN Scanner

32. Fie w o rădăcină comună a celor două polinoame. Avem $3w^{2n} + aw^2 + 2 = 0$ și $2w^{2m} + aw^m + 3 = 0$ și deci

$$w^n = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 24}}{6} \text{ și } w^m = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 24}}{4} \text{ adică}$$

$$w^{mn} = \left(\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 24}}{6}\right)^m \text{ și } w^{mn} = \left(\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 24}}{4}\right)^n.$$

Punînd $-a + \sqrt{a^2-24} = b$ rezultă $-a - \sqrt{a^2-24} = \frac{24}{b}$. Este necesar să avem una din egalitățile:

$$1°.\ \left(\frac{b}{6}\right)^m = \left(\frac{b}{4}\right)^n;\ 2°.\ \left(\frac{b}{6}\right)^m = \left(\frac{6}{b}\right)^n;\ 3°.\ \left(\frac{4}{b}\right)^m = \left(\frac{b}{4}\right)^n;$$

$$4°.\ \left(\frac{4}{b}\right)^m = \left(\frac{6}{b}\right)^n.$$

Deoarece $b \neq 0$, egalitatea 1° devine $b^{n-m} = \frac{4^n}{6^m}$. Însă $b^{n-m} = k + h\sqrt{a^2-24}$; $k, h \in Z$ și deci $b^{n-m} \neq \frac{4^n}{b^m}$.

Analog se arată că egalitatea 4° nu este posibilă. Egalitatea 2° se scrie $b^{m+n} = 6^{m+n}$ și deci $b = 6\omega$ unde ω este o rădăcină de ordin $m + n$ a unității, și deci $-a + \sqrt{a^2-24} = 6\omega$ rezultă de aici succesiv:

$$\sqrt{a^2-24} = 6\omega + a;\ a^2-24 = 36\omega^2 + 12a\omega + a^2;\ a = \frac{-2-3\omega^2}{\omega};$$

$$a = \frac{-2}{\omega} - 3\omega = -2\left(\cos\frac{2k\pi}{m+n} - i\sin\frac{2k\pi}{n+n}\right) -$$

$$-3\left(\cos\frac{2k\pi}{m+n} + i\sin\frac{2k\pi}{m+n}\right) = -5\left(\cos\frac{2k\pi}{m+n} - i\sin\frac{2k\pi}{m+n}\right).$$

Cum $a \in Z$ rezultă $\sin\frac{2k\pi}{m+n} = 0$ și deci $a = \pm 5$. Pentru $a = 5$ avem:

$P(x) = (3x^n + 2)(x^n + 1)$ și $Q(x) = (2x^m + 3)(x^n + 1)$.

Pentru $a = -5$ avem:

$P(x) = (3x^n - 2)(x^n - 1)$ și $Q(x) = (2x^m - 3)(x^n - 1)$.

Scanned with OKEN Scanner

În ambele cazuri Q admite rădăcinile de modul $\sqrt[m]{\frac{3}{2}}$. Cum P nu admite asemenea rădăcini rezultă că P nu se divide la Q.

Cazul 3° se tratează analog.

33. Pentru $x \notin \{a/Q(a) = 0\}$ avem:

$$P(x) = \frac{R(x)S(x)}{Q(x)} \text{ și deci } A(x) = \frac{R^n(x)S^n(x)}{Q^n(x)} + Q^n(x) +$$

$$+ R^n(x) + S^n(x) = \frac{[S^n(x) + Q^n(x)] \cdot [R^n(x) + Q^n(x)]}{Q^n(x)}.$$

Notăm $S^n(x) + Q^n(x) = K(x)$ și $R^n(x) + Q^n(x) = H(x)$. Deoarece $A(x) = \frac{K(x)H(x)}{Q^n(x)}$ rezultă că $Q^n(x) \mid K(x)\,H(x)$.

Dacă $Q^n(x) \mid K(x) \Rightarrow A(x) = [S^n(x) + Q^n(x)]\ w(x)$ și chiar dacă $w(x)$ este constant, $S^n(x) + Q^n(x)$ este decompozabil.

Dacă $Q^n(x) = W(x)\ V(x)$ unde $W(x) \mid K(x)$ și $V(x) \mid H(x)$ evident $A(x)$ este decompozabil.

34. Dacă ecuația $P(x) = 0$ are rădăcină dublă atunci $a^2 - 4b = 0$ și deci $b = \frac{a^2}{4}$. Cum $b \in Z$ rezultă $a = 2A$ și deci rădăcina dublă este întreaga și egală cu $\frac{a}{2} = -A$. Q trebuie să verifice relațiile: $Q(-A) = 0$, $Q'(-A) = 0$ adică $(-A)^n + a_n\ A + b_n = 0$; $n(-A)^{n-1} + a^n = 0$ și deci

$$a_n = -n(-A)^{n-1} \text{ și } b_n = -(-A)^n + n(-A)^{n-1}\ A =$$
$$= (-1)^{n+1}A^n + n(-1)^{n-1}A^n = (-1)^{n-1}A^n + n(-1)^{n-1}A^n =$$
$$= (-1)^{n-1}A^n(n+1).$$

Dacă ecuația $P(x) = 0$ are rădăcinile distincte x_1 și x_2 atunci Q trebuie să verifice condițiile $Q(x_1) = 0$, $Q(x_2) = 0$ adică $a_n x_1 + b_n = -x_1^n$; $a_n x_2 + b_n = -x_2^n$ și deci

$$a_n = -\frac{x_1^n - x_2^n}{x_1 - x_2} = -(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_2 + \ldots + x_1 x_2^{n-1} + x_2^{n-1}) =$$
$$= H(x_1, x_2).$$

Cum $H(x_1, x_2)$ este un polinom simetric în x_1 și x_2 el se poate scrie ca polinom în $x_1 + x_2$, $x_1 x_2$ cu coeficienți întregi.

Scanned with OKEN Scanner

Deoarece $x_1 + x_2 = -a \in Z$ și $x_1 x_2 = b \in Z$ rezultă $a_n = H(x_1, x_2) \in Z$. Deoarece

$$b_n = -x_1 x_2 \frac{(x_1^{n-1} - x_2^{n-1})}{x_1 - x_2} = -b(x_1^{n-2} + x_1^{n-3}x_2 + \ldots + x_1 x_2^{n-3} + x_2^{n-2}) = -b \cdot L(x_1, x_2).$$

Cum și L este un polinom simetric în x_1 și x_2 rezultă $L(x_1, x_2) \in Z$ și deci $b_n \in Z$.

35. Presupunem $P = P_1 \cdot P_2$; $P_1, P_2 \in Z[x]$ unde P_1 și P_2 au coeficienții dominanți egali cu 1. Deoarece $P(x) > 0$, $x \in \mathbf{R}$ rezultă că P_1 și P_2 nu au rădăcini reale și $P_1(x) > 0$; $P_2(x) > 0$, $x \in \mathbf{R}$.

a) Presupunem grad $P_1 <$ grad P_2 și deci grad $P_1 < n$, grad $P_2 > n$. Făcînd $x = a_1, a_2, \ldots, a_n$ avem $P_1(a_1) P_2(a_1) = 1$; $P_1(a_2) P_2(a_2) = 1$, $P_1(a_n) P_2(a_n) = 1$. Deoarece $P_1(x) > 0$ și $P_2(x) > 0$ rezultă $P_1(a_1) = P_2(a_1) = 1$; $P_1(a_2) = P_2(a_2) = 1$ ... $P_1(a_n) = P_2(a_n) = 1$. (1) Polinomul de grad mai mic decît n, $P_1(x) - 1$ are n rădăcini $a_1, a_2, \ldots, a_n$ și deci este identic nul. Deci $P_1(x) = 1$ și $P_2(x) = P(x)$, adică nu s-a realizat o descompunere a lui P.

b) Dacă grad $P_1 =$ grad $P_2 = n$ rezultă din relațiile (1) că $P_1(x) - 1 = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) = P_2(x) - 1$ și deci $P_1(x) = P_2(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) + 1$ adică $P(x) = [(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) + 1]^2$, ceea ce este evident fals.

36. Presupunem $P(x) = Q(x)R(x)$, $Q, R \in Z[x]$ și a_i, $i = 1, 2, \ldots, 2n + 1$ astfel ca $P(a_i) = Q(a_i)R(a_i) = b_i$ unde b_i, $i = 1, 2, \ldots, 2n + 1$ sînt numere prime. Rezultă că pentru fiecare $i = 1, 2, \ldots, 2n + 1$ avem $Q(a_i) = \pm 1$ sau $P(a_i) = \pm 1$. Fie grad $Q = q$, grad $R = r$; avem $q + r = n$. Fie q_1, q_2, r_1, r_2 numărul de valori ale lui i pentru care avem respectiv: $Q(a_i) = 1$, $Q(a_i) = -1$, $R(a_i) = 1$, $R(a_i) = -1$; rezultă că $q_1 + q_2 + r_1 + r_2 \geqslant 2n + 1$ și deci: $(q_1 - q) + (q_2 - q) + (r_1 - r) + (r_2 - r) \geqslant 1$ și deci cel puțin una dintre paranteze este strict pozitivă. Fie aceasta $q_1 - q$. Avem deci $q_1 - q \geqslant 1$ adică ecuația de gradul q, $Q(x) - 1 = 0$ are mai mult de q rădăcini și deci $Q(x) \equiv 1$ adică P este ireductibil.

37. Fie $Q(x) \in Z[x]$, $Q(x)$ divizibil la $P(x)$. Dacă x este o rădăcină a lui $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ atunci $|x_1| \leqslant 1 + \max \left| \frac{a_k}{a_0} \right|$

și analoagele. Rădăcina $x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2+4}}{2}$ a lui $P(x)$ este rădăcină și pentru $Q(x)$ deci: $\frac{a + \sqrt{a^2+4}}{2} \leqslant 1 +$ $+ \max \left| \frac{a_k}{a_0} \right|$. Presupunem prin absurd că $|a_k| \leqslant a - 1$; $k = 0, 1, \ldots, n$, deducem $\frac{a + \sqrt{a^2+4}}{2} \leqslant 1 + (a-1) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sqrt{a^2+4} \leqslant a$ adică $4 < 0$, contradicție care infirmă presupunerea $|a_k| < a - 1$.

38. $P(1) = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n = 2k + 1$. Cum a_0 și a_n sînt impare rezultă: $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} = 2h + 1$.

Presupunem că $\frac{p}{q}$ este o rădăcină a lui P; $p, q \in Z - \{0\}$. Cum $p \mid a_n$ și $q \mid a_0$ rezultă că p și q sînt numere impare. $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0 \Leftrightarrow a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + \ldots + a_{n-1} p q^{n-1} +$ $+ a_n q^n = 0$ și deci $a_0 p^n + a_n q^n + a_1 (p^{n-1} q - 1) + \ldots$ $\ldots + a_{n-1} (p q^{n-1} - 1) = -2h - 1$. Însă $a_0 p^n + a_n q^n$ este un număr par. La fel $p^{n-k} q^k - 1$ sînt numere pare și deci s-a ajuns la o contradicție.

Observație. Condițiile din enunț se puteau scrie sub forma: a_0 impar și există două numere x_1, x_2 unul par și altul impar pentru care $P(x_i)$ este impar $i = 1, 2$.

39. Dacă P ar admite o rădăcină întreagă a atunci s-ar scrie $P(x) = (x - a)Q(x)$ unde Q este un polinom cu coeficienți întregi. Conform enunțului avem:

$$P(k) = (k - a)Q(k) = 2s + 1 \quad \text{și} \quad (h - a)Q(h) = 2t + 1.$$

Cum k și h sînt unul par și altul impar, dintre numerele $k - a$ și $h - a$ unul este par și deci $P(k)$ și $P(h)$ nu pot fi amîndouă impare. Așadar P nu are rădăcini întregi.

Observație. Dacă se adaugă condiția că polinomul P are coeficientul dominant impar se poate arăta că P nu are nici rădăcini raționale. Într-adevăr, fie $\frac{a}{b}$ o rădăcină rațională a lui P. Cum b divide coeficientul dominant rezultă b impar. Avem $P(x) = (bx - a)Q(x)$ unde Q are coeficienți întregi $P(k) = (bk - a)Q(k)$; $P(h) = (bh - a)Q(h)$. Cum $(bk - a) - (bh - a) = b(k - h)$ este impar rezultă că unul

Scanned with OKEN Scanner

din numerele $bk - a$ și $bh - a$ este par și deci $P(k)$ și $P(h)$ nu pot fi amîndouă impare.

40. Punînd $a = 2m + 1$, $b = 2n + 1$, $c = 2p + 1$. Avem $\Delta = b^2 - 4ac = (2n + 1)^2 - 4(2m + 1)(2n + 1)$.

Pentru ca P să aibă rădăcini raționale este necesar ca Δ să fie pătrat perfect adică, $\Delta = (2t + 1)^2$. Vom arăta că aceasta este imposibil:

$(2n + 1)^2 - (2t + 1)^2 = 4(2m + 1)(2n + 1)$ adică

$(n - t)(n + t + 1) = (2m + 1)(2n + 1)$. Numerele $n - t$ și $n + t$ sînt amîndouă pare sau impare și deci $n - t$ și $n + t + 1$ sînt unul par și celălalt impar deci primul membru al egalității este par, iar al doilea impar. Un rezultat mai general este următorul:

Dacă un polinom de grad par are toți coeficienții impari atunci el nu are rădăcini raționale.

Avem evident $P(0)$ număr impar. La fel $P(1) = a_0 + a_1 + \ldots + a_{2n}$ număr impar. Din observația de la problema precedentă rezultă că P nu are rădăcini raționale.

41. a) Avem $P(x) = (ax + b)Q(x)$ unde $Q \in Z[x]$ și $a > 0$. Avem: $|P(e_1)| = |ae_1 + b| \cdot |Q(e_i)| = 1$ și $|P(e_2)| = |ae_2 + b| \cdot |Q(e_2)| = 1$ și deci $ae_1 + b = s_1$, $ae_2 + b = s_1$, $ae_2 + b = s_2$ unde $s_1, s_2 \in \{-1, 1\}$. Dacă $s_1 = s_2$ rezultă $e_1 = e_2$ care contrazice inegalitatea $e_1 < e$. Avem deci: 1) $ae_1 + b = -1$; $ae_2 + b = 1$ de unde $a(e_1 - e_2) = -2$ și deci $e_1 - e_2 \mid 2$ adică $e_2 - e_1 \leqslant 2$.

b) Presupunînd că P admite și rădăcina rațională $-\frac{d}{c}$ $(c > 0)$ rezultă 2) $ce_1 + d = -1$ și $ce_2 + d = 1$ și deci din 1) și 2) rezultă:

$$e_1(a - c) + b - d = 0 \text{ și } e_2(a - c) + b - d = 0.$$

Pentru $a = c$ obținem $b = d$ și deci rădăcinile raționale se confundă. Pentru $a \neq c$ obținem contradicția $e_1 = e_2$.

c) Din 1) se obține $a = \frac{2}{e_2 - e_1}$, $b = -\frac{e_1 + e_2}{e_2 - e_1}$ și rădăcina rațională este $r = -\frac{b}{a} = \frac{e_1 + e_2}{2}$. Dacă $e_1 + e_2$ este par avem $r \in Z$. Dacă $e_1 + e_2$ este impar, atunci $r + \frac{1}{2} = \frac{e_1 + e_2 + 1}{2} \in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

42. Dacă $f(a+\sqrt{b})=0$, atunci se știe că $f(a-\sqrt{b})=0$ și deci

$$f(x)=(x-a-\sqrt{b})(x-a+\sqrt{b})g(x)=(x^2-2ax+a^2-b)g(x)$$

și deci $f(-x)=(x^2+2ax+a^2-b)g(-x)$.

Dacă f este funcție pară sau impară rezultă că $f(-x)=\pm f(x)$ și deci $f(x)=(x^2+2ax+a^2-b)h(x)$ unde $h(x)=\pm g(x)$.

Deoarece polinoamele $x^2-2ax+a^2-b$ și $x^2+2ax+a^2-b$ sînt prime între ele rezultă

$$f(x)=(x^2-2ax+a^2-b)(x^2+2ax+a^2-b)\cdot h(x)$$

și deci $f(\pm a\pm\sqrt{b})=0$.

43. Din $P(\alpha_1)=Q$; $P(\alpha_2)=0$, obținem prin scădere $(\alpha_2-\alpha_1)\cdot N=1$ unde $N\in Z$ deci $\alpha_2-\alpha_1=\varepsilon$ $(\varepsilon=\pm 1)$. Analog $\alpha_3-\alpha_2|1$. Dacă $\alpha_3-\alpha_2=-\varepsilon$ rezultă $\alpha_1=\alpha_3$ și deci $P(\alpha_1)=P(\alpha_3)$ ceea ce contrazice ipoteza. Deci $\alpha_3-\alpha_2=\varepsilon$. La fel se obține $\alpha_k-\alpha_{k-1}=\varepsilon$, $k=2,\ldots,n$ și deci $\alpha_k=\alpha_1+(k-1)\varepsilon$.

$P(\alpha_k)=k$ se scrie $P[\alpha_1+(k-1)\varepsilon]-k=0$, $k=1,2,\ldots,n$ și deci polinomul de gradul n, $Q(x)=P[\alpha_1+\varepsilon(x-1)]-x$ are rădăcinile $1,2,\ldots,n$ și deci $Q(x)=a_0(x-1)\ldots(x-n)$ adică $P[\alpha_1+\varepsilon(x-1)]=a_0(x-1)\ldots(x-n)+x$. Punem $\alpha_1+\varepsilon(x-1)=y$ și avem $x=\frac{y-\alpha_1}{\varepsilon}+1=\varepsilon(y-\alpha_1)+1$ și deci $P(y)=a_0[\varepsilon(y-\alpha_1)][\varepsilon(y-\alpha_1)-1]\ldots[\varepsilon(y-\alpha_1)-n+1]+\varepsilon(y-\alpha_1)+1$. Punînd $a_0\varepsilon^n=a$ avem $P(x)=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_1-\varepsilon)\ldots[x-\alpha_1-(n-1)\varepsilon]+\varepsilon(x-\alpha_1)+1$, unde $a\in Z$ și $\varepsilon=\pm 1$.

b) Presupunem $P(h)=0$, $h\in Z$. Notăm $h-\alpha_1=b$ și avem $ab(b-\varepsilon)\ldots[b-(n-1)\varepsilon]+\varepsilon b+1=0$ adică $b[a(b-a)\ldots(b-(n-1)\varepsilon)+\varepsilon]+1=0$ și deci $b=\pm 1$. Cum $b=\varepsilon$ conduce la contradicția $\varepsilon^2+1=0$ rezultă $b=-\varepsilon$ adică $a(-1)^n\varepsilon^n n!=0$, ceea ce conduce la $a=0$ adică $P(x)$ are gradul 1. Deci $P(x)$ nu are rădăcini întregi. Pentru $n\geqslant 4$ nu are nici rădăcini raționale.

44. Avem $|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|<2^n$ (vezi problema 40 cap. II) și cum $a_i\in Z$, $i=1,2,\ldots,n$ rezultă că numărul polinoamelor P, de grad n fixat este finit. Fie $Q_m(x)=(x-x_1^m)(x-x_2^m)\ldots(x-x_n^m)$. Rădăcinile lui Q_m

Scanned with OKEN Scanner

sînt x_i^m, $i = 1, 2, \ldots, n$ și verifică relația $|x_i^m| \leqslant 1$ și deci numărul polinoamelor Q_m este finit. Există deci un șir strict crescător de numere naturale $m_0, m_1, m_2 \ldots$ astfel încît $Q_{m_0} = Q_{m_1} = Q_{m_2} = \ldots$ și deci există o permutare $(w_1, w_2 \ldots w_n)$ a numerelor $1, 2, \ldots, n$ astfel încît

$$x_1^{m_i} = x_{w_1}^{m_0}, \quad x_2^{m_i} = x_{w_2}^{m_0}, \ldots, x_n^{m_i} = x_{w_n}^{m_0}.$$

Cum numărul permutărilor $(w_1, w_2, \ldots w_n)$ este finit, iar numărul exponenților m_i este infinit vom găsi doi exponenți $m_k > m_j$ cărora le corespunde aceeași permutare și deci

$$x_1^{m_k} = x_1^{m_h}, \quad x_2^{m_k} = x_2^{m_h}, \ldots, x_n^{m_k} = x_n^{m_n} \text{ și deci}$$

$x_i^{m_k - m_h} = 1$; $i = 1, 2, \ldots, n$, adică x_i sînt rădăcini de ordin $m_k - m_h$ ale unității.

45. Relația dată se scrie $\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a_{n-2}}{a_n} = 1$ adică $\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)^2 - 2 \cdot \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{x_i x_j} = 1$ și deci $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x^2} = 1$ unde x_i, $i = 1, \ldots, n$ sînt rădăcinile ecuației. Pentru $n = 1$ relația dată nu are sens. Pentru $n = 2$ ecuația $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 1$ nu are soluții naturale deoarece $|x_1| \leqslant |x_2| \Rightarrow \frac{1}{x_1^2} \geqslant \frac{1}{x_2^2}$ și deci $1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \leqslant \frac{2}{x_1^2}$ unde $x_1^2 \leqslant 2$; $x_1 \leqslant \sqrt{2}$ și deci $|x_1| = 1$. Ecuația revine la $\frac{1}{x_2^2} = 0$. Pentru $n = 3$ ecuația $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} = 1$ nu are soluții. Într-adevăr $|x_1| \leqslant |x_2| \leqslant |x_3| \Rightarrow 1 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} \leqslant \frac{3}{x_1^2}$ și deci $x_1^2 \leqslant 3$ adică $|x_1| = 1$. Pentru $n = 4$ avem soluția $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 2$ care și deci există ecuații care verifică condițiile cerute (putem lua și $x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = x_4 = -2$ etc.). Pentru $n = 5$ nu

Scanned with OKEN Scanner

avem soluții pentru ecuația $\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{x_i^2} = 1$. deoarece $|x_i| \geq 2$, $i = 1, 2, 3$, și $|x_i| \geq 3$, $i = 4,5$ și deci

$$\sum_{1}^{5} \frac{1}{x^2} \leqslant 3 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{35}{36} < 1.$$

Vom arăta că avem soluții pentru $n \geqslant 6$. Pentru $n = 6$, avem soluția $(2; 2; 2; 3; 3; 6)$; Pentru $n = 7$, avem soluția $(2; 2; 2; 4; 4; 4; 4)$; Pentru $n = 8$, avem soluția $(2; 2; 2; 3; 3; 7; 14; 21)$.

Presupunînd că avem soluții pentru un $m \geqslant 6$ vom arăta că avem soluții pentru $m + 3$. Într-adevăr, egalitatea $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_m^2} = 1$ se mai scrie:

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_{m-1}^2} + \frac{1}{(2x_m)^2} + \frac{1}{(2x_m)^2} + \frac{1}{(2x_m)^2} + \frac{1}{(2x_m)^2} = 1$$

Deci există ecuații cu condițiile din enunț pentru $n = 4, 6, 7, 8, 9, 10 \ldots$

46. În formula

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} P(x_k) \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$$

punem $x_k = a + k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, și avem

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} P(a+k) \frac{(x-a)(x-a-1)\ldots(x-a-k+1)}{k!} \cdot \frac{(x-a-k-1)\ldots(x-a-n)}{(n-k)!}.$$

Pentru $h > a + n$ avem

$$P(h) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_{k-a}^{k} C_{h-a-k-1}^{n-k} P(a+k) \in Z.$$

Pentru $h < a$. Avem

$$P(h) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}(-1)^{k}(-1)^{n-k} C_{a+k-h-1}^{k} C_{a+n-h}^{n-k} P(a+k)$$

și deci $P(h) \in Z$, $(\forall)\, h \in Z$.

Scanned with OKEN Scanner

47. Fie $Q(x) = P(x^2)$. Q este un polinom de gradul $2n$ care pentru $2n+1$ valori consecutive: $-n$, $-(n-1)$, ... $-1, 0, 1, ..., n-1$, n ia valori întregi. Din rezultatul de la problema 46 rezultă $Q(h) \in Z$, $(\forall)\ h \in Z$ și deci $P(h^2) \in Z$, $(\forall)\ h \in Z$.

48. Fie $p_n \leqslant N < p_{n+1}$ numere prime. Presupunem prin reducere la absurd că dacă $p \mid P(x)$, $k \in Z$ atunci $p \leqslant p_n$. Presupunînd $a_0 \neq 0$ avem: $P(a_0, p_1p_2 \dots p_n) = a_n(a_0p_1 \dots p_n)^n + \dots + a_1(a_0p_1p_2 \dots p_n) + a_0 = a_0[\mathcal{M}p_1p_2 \dots p_n + 1]$. Evident orice divizor prim al numărului $\mathcal{M}p_1p_2 \dots p_n + 1$ este superior lui N.

Dacă $a_0 = 0$, $P(x) = xQ(x)$ și deci $p \mid P(p)$ $(\forall)\ p$.

49. Vom demonstra afirmația pentru polinomul $Q(x) = x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n$. Fie p prim, $p > 1 + |b_1| + \dots + |b_{n-1}|$. Ecuația $Q(x) = b_n + p$ are cel puțin o soluție reală și pozitivă deoarece punînd $R(x) = Q(x) - b_n - p$ avem $R(0) = -p < 0$; $\lim\limits_{x \to \infty} R(x) = \infty$.

$Q(x) = b_n + p = 0 \Rightarrow x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x - p = 0$. Singurele soluții raționale și pozitive pot fi 1 și p dar $R(1) = 1 + b_1 + \dots + b_{n-1} - p < 0$ și $R(p) = p^n + b_1p^{n-1} + \dots + b_{n-1}p - p = 0$ deci

$$p = -\left(b_1 + \frac{b_2}{p} + \dots + \frac{b_{n-1}}{p^{n-2}} - \frac{1}{p^{n-2}}\right) < |b_1| + |b_2| + \dots |b_{n-1}| + 1.$$

ceea ce contrazice ipoteza.

Așadar, ecuația $R(x) = Q(x) - b_n - p = 0$ are o soluție irațională i_1. Avem deci $Q(i_1) = b_n + p$ și deci $Q(i_1) \in Q$. Pentru $q > p$ (q număr prim) găsim i_2 astfel ca $Q(i_2) = b_n + q$. Evident $i_1 \neq i_2$. Realizăm în felul acesta un șir de numere iraționale diferite $i_1, i_2, i_3, \dots, i_k, \dots$ pentru care $Q(i_k) \in Q$.

Punînd $b_1 = \frac{a_1}{a_0}$, $b_2 = \frac{a_2}{a_0}$, ..., $b_n = \frac{a_n}{a_0}$ rezultă $P(x) = \frac{1}{a_0}Q(x)$ și deci $P(i_i) \in Q$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Scanned with OKEN Scanner

50. Din enunț rezultă că $P(0)$, $P(1)$ ... $P(n)$ se divide la p și deci:

$$P(0) = a_n = kp;$$
$$P(1) = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n = k_1 p$$
$$P(2) = a_0 2^n + a_1 2^{n-1} + \ldots + a_{n-1} 2 + a_n = k_2 p$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P(n) = a_0 n^n + a_1 n^{n-1} + \ldots + a_{n-1} n + a_n = k_n p$$

Adică: $a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} = p(k_1 - k)$
$$a_0 2^n + a_1 2^{n-1} + \ldots + a_{n-1} 2 = p(k_2 - k).$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_0 n^n + a_1 n^{n-1} + \ldots + a_{n-1} n = p(k_n - k)$$

Determinantul acestui sistem este:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2^n & 2^{n-1} & \ldots & 2 \\ 3^n & 3^{n-1} & \ldots & 3 \\ \vdots & & & \\ n^n & n^{n-1} & \ldots & n \end{vmatrix}$$

și deci $|D| = \left| \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (i - j) \right| = 0.$

Deoarece $1 \leqslant i, j < p$ rezultă că $i - j$ nu conține factorul prim p și deci $D \neq \mathcal{M}_p$.

Avem $a_i = \dfrac{D_i}{D}$ unde $D_i = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & p(k_1 - k) & \ldots & 1 \\ 2^n & 2^{n-1} & \ldots & p(k_2 - k) & \ldots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 2^n & n^{n-1} & \ldots & p(k_n - k) & \ldots & n \end{vmatrix} = \mathcal{M}_p$

și deci $a_i = \mathcal{M}_p\ p;\ i = 1, 2, \ldots, n.$

51. Pentru $p = 2$, $Q(a) = a^2 - a = a(a - 1)$. Cum $Q(a)$ este produsul a două numere consecutive rezultă că $Q(a)$ se divide la 2. Pentru $p > 2$, p este impar și deci $Q(-a) = -Q(a)$. Este suficient deci să demonstrăm afirmația numai pentru numerele naturale a, și aceasta o vom face prin inducția după a. Pentru $a = 1$, $Q(1) = 1 - 1 = 0$ deci $p \mid Q(1)$.

Scanned with OKEN Scanner

Presupunem $p \mid Q(a)$ și vom arăta că $p \mid Q(a+1)$.

$Q(a+1) = (a+1)^p - a - 1 = a^p + C_p^1 a^{p-1} + C_p^2 a_p^{p-2} + \ldots + C_p^{p-1} a + 1 - a - 1 = Q(a) + C_p^1 a^{p-1} + C_p^2 a^{p-2} + \ldots + C_p^{p-1} a.$

Deoarece p este prim C_p^k $(k = 1, 2, \ldots, p-1)$ se divide la p și deci $p \mid Q(a+1)$.

52. Vom demonstra mai întîi că dacă p este un număr prim și k nu se divide cu p atunci există numere m astfel încît:

$$mk \equiv 1 \pmod{p}.$$

Numerele $k, 2k, 3k, \ldots, (p-1)k$ sînt prime cu p și dau la împărțirea cu p resturi diferite. Într-adevăr $ik \equiv r_i \pmod{p}$ $jk \equiv r_j \pmod{p}$. $1 \leqslant r_i, r_j \leqslant p-1$. Dacă $r_i = r_j$ rezultă $p \mid ik - jk$ adică $p \mid i - j$. Cum $1 \leqslant i, j \leqslant p-1$ relația $p \mid i - j$ este imposibilă și deci $r_i \neq r_j$. Așadar, resturile r_i $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$ parcurg mulțimea $1, 2, \ldots, p-1$ și deci unul dintre aceste resturi este 1. Așadar, există m astfel încît $mk \equiv 1 \pmod{p}$. Deoarece $a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n \equiv 0 \pmod{p}$ avem și

$$m^n (a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Dar:

$$a_0 k^n m^n = a_0 (km)^n \equiv a_0 \pmod{p}$$
$$a_1 k^{n-1} m^n = a_1 (km)^{n-1} m \equiv a_1 m \pmod{p}$$
$$\vdots$$
$$a_{n-1} k m^n = a_{n-1} (km) m^{n-1} \equiv a_{n-1} m^{n-1} \pmod{p}$$

și deci

$$a_0 + a_1 m + \ldots + a_{n-1} m^{n-1} + a_n m^n \equiv 0 \pmod{p}.$$

53. Punem $Q(x) = P(x) - 2$ și avem $Q(x_i) = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ și deci $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) R(x)$ unde $R(x)$ este un polinom cu coeficienți întregi. Fie $k \in Z$, $P(k) = Q(k) + 2 = (k - x_1)(k - x_2)(k - x_3)(k - x_4) R(k) + 2$. Pentru ca $P(k)$ să fie impar este necesar și suficient ca $k - x_1$, $k - x_2$, $k - x_3$, $k - x_4$, $R(k)$ să fie impare.

Cum numerele $k - x_1$, $k - x_2$, $k - x_3$, $k - x_4$ sînt diferite și impare avem $|(k - x_1)(k - x_2)(k - x_3)(k - x_4)| \geqslant |(-3)(-1)(1)(3)| = 9$.

Din $|R(k)| \geqslant 1$ și $P(k) > 0$ rezultă $P(k) \geqslant 9 + 2 = 11$ și deci $P(k)$ nu poate lua valorile $1, 3, 5, 7, 9$.

Scanned with OKEN Scanner

54. Fie x_1, x_2, x_3, x_4 numere întregi diferite. Punem $Q(x) = P(x) - 7$ și avem $Q(x_i) = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ deci $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)R(x)$ unde $R(x)$ este un polinom cu coeficienți întregi.

$$P(k) = 14 \Rightarrow Q(k) + 7 = 14; \quad Q(k) = 7$$

$$(k - x_1)(k - x_2)(k - x_3)(k - x_4)R(k) = 7 \qquad (1)$$

Luînd $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ avem: $k - x_1 = 7$, $k - x_2 = 1$, $k - x_3 = -1$ sau $k - x_1 = 1$, $k - x_2 = -1$, $k - x_3 = -7$ și deci $|k - x_4| > 1$ ceea ce face imposibilă egalitatea (1).

Observație. Rezultatul rămîne adevărat dacă numerele 7 și 14 din enunț se înlocuiesc cu două numere a căror diferență este un număr prim.

55. Dacă $i < k$; $(x^i)^{(k)} = 0$; dacă $i \geqslant k$; $(x^i)^{(k)} = i(i-1)\ldots(i-k+1)x^{i-k} = k!\,C_i^k x^{i-k}$.

Fie $P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$. Avem $p^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{n} k!\,C_i^k\,x^{i-k}$ și deci $k!\,P^{(k)}(m)$ pentru orice $m \in Z$.

56. a) Din condițiile $P(0) = 1$ și $P(1) = 1$ rezultă că $P(x) - 1$ se divide cu x și cu $x - 1$ și deci cu $x(x-1)$. Notînd cu $P_1(x)$ cîtul împărțirii lui $P(x) - 1$ la $x(x-1)$ avem:

$P(x) - 1 = x(x-1)P_1(x)$ și deci $P(x) = x(x-1)P_1(x) + 1$.

b) Din $x_{n+1} = P(x_n)$ rezultă $x_{n+1} = x_n(x_n - 1)P_1(x) + 1$ și deci:

$$\begin{aligned}
&x_1 = x_0(x_0 - 1)P_1(x_0) + 1\\
&x_2 = x_1(x_1 - 1)P_1(x_1) + 1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_n = x_{n-1}(x_{n-1} - 1)\,P_1(x_{n-1}) + 1 \qquad \text{de unde:}\\
(1^\circ)\qquad &x_1 - 1 = x_0(x_0 - 1)\,P_1(x_0)\\
&x_2 - 1 = x_1(x_1 - 1)P_1(x_1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_n - 1 = x_{n-1}(x_{n-1} - 1)\,P_1(x_{n-1})
\end{aligned}$$

Dacă $x_k = 1$, $k \leqslant n$ rezultă $x_{k+1} = 1$, $x_{k+2} = 1, \ldots, x_n = 1$ și enunțul este justificat. Dacă $x_k \neq 1$, $k < n$ prin înmulțirea

Scanned with OKEN Scanner

relațiilor (1°) obținem după împărțirea cu $(x_1 - 1)\ (x_2 - 1) \ldots (x_{n-1} - 1)$:

(2°) $x_n = x_0 x_1 \ldots x_{n-1}(x_0 - 1)\ P_1(x_0)\ P_1(x_1) \ldots P_1(x_{n-1}) + 1.$

Relația (2°) arată că orice divizor comun al lui x_n și x_k, $k \leqslant n - 1$ divide pe 1; rezultă deci că x_n este prim cu $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$.

57. $P'(x) = n_k x^{n_k - 1} + n_{k-1} x^{n_{k-1} - 1} + \ldots + n_1 x^{n_1 - 1}$.

Polinomul dat se scrie

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - 1)^2 x + Ax^2 + Bx + C,$$

$$P'(x) = Q(x) \cdot (x - 1)^2 + 2xQ(x)\ (x - 1) + Q'(x)\ (x - 1)^2 x + 2Ax + B.$$

$$P(1) = A + B + C = k + 1; \quad P(0) = C = 1.$$

$$P'(1) = 2A + B = \sum_{h=1}^{k} n_h$$

Se obține sistemul:

$$\begin{cases} C = 1 \\ A + B + C = k + 1 \\ 2A + B = \sum_{h=1}^{k} n_h \end{cases}$$

care are soluția $\left(\sum_{h=1}^{k} n_k - k;\ \ 2k - \sum_{h=1}^{k} n_h;\ \ 1\right)$.

Deci restul împărțirii polinomului dat prin $x(x - 1)^2$ va fi

$$R(x) = \left(\sum_{h=1}^{k} n_h - k\right) x^2 + \left(2k - \sum_{h=1}^{k} n_h\right) x + 1.$$

58. 1) Facem $x = 1$ în identitate și obținem:

a) $6^n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n-1} + a_{2n}$; pentru $x = -1$ avem

b) $0 = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots - a_{2n-1} + a_{2n}$.

Prin adunare $2(a_0 + a_2 + \ldots + a_{2n}) = 6^n$, de unde

$$a_0 + a_2 + \ldots + a_{2n} = \frac{6^n}{2} = 2^{n-1} 3^n;$$

din b) rezultă $a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1} = a_0 + a_2 + \ldots + a_{2n}$.

Scanned with OKEN Scanner

2) $(x^2+3x+2)^n=(1+x)^n(2+x)^n=(1+C_n^1x+C_n^2x^2+$
$+C_n^3x^3+\ldots+x^n)(2^n+C_n^12^{n-1}x+C_n^22^{n-2}x^2+C_n^32^{n-3}x^3+\ldots+x^n)$.
Coeficientul lui x^2 este dat de suma:

$$C_n^2 2^{n-2}+C_n^1C_n^1 2^{n-1}+C_n^2 2^n=\frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}+n\cdot n\cdot 2^{n-1}+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}2^n=n(n-1)2^{n-3}+n^2\cdot 2^{n-1}+n(n-1)2^{n-1}=$$

$$=n\cdot 2^{n-3}[n-1+n\cdot 2^2+(n-1)2^2]=n\cdot 2^{n-3}(n-1+4n+$$
$$+4n-4)=n\cdot 2^{n-3}(9n-5) \quad \text{deci} \quad a_2=2^{n-3}n(9n-5).$$

59. Este necesar și suficient ca C_n^k să fie impar, $(\forall)k=1,2,\ldots,n-1$. În descopunerea în factori primi a lui $n!$ numărul 2 apare cu exponentul: $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]+\left[\frac{n}{2^3}\right]+\ldots$
Deoarece $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ exponentul lui 2 în descompunerea lui C_k^n este

$$a_k=\left(\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{k}{2}\right]-\left[\frac{n-k}{2}\right]\right)+\left(\left[\frac{n}{2^2}\right]-\left[\frac{k}{2^2}\right]-\left[\frac{n-k}{2^2}\right]\right)+\ldots$$

Este necesar și suficient ca a_k să fie nul $(\forall)k=1,2,\ldots,n-1$, adică $\left[\frac{n}{2i}\right]-\left[\frac{k}{2i}\right]-\left[\frac{n-k}{2i}\right]=0$, $(\forall)\,k=1,2,\ldots,n-1$ și $i=1,2,3,\ldots$ Fie $2^m\leqslant n<2^{m+1}$. Punem $n=2^m+b_12^{m-1}+$ $+b_22^{m-2}+\ldots+b_{m-1}2+b_m$, $b_i\in\{0,1\}$.

Este necesar să avem $\left[\frac{n}{2^m}\right]-\left[\frac{2^m-1}{2^m}\right]\left[\frac{n-2^m+1}{2^m}\right]=0$ și deci $\left[\frac{n}{2^m}\right]-\left[\frac{n+1}{2^m}-1\right]=0$ adică $1-\left[\frac{n+1}{2^m}\right]+1=0$ sau $\left[\frac{n+1}{2^m}\right]=2$ ceea ce înseamnă $n+1\geqslant 2^{m+1}$. Cum $n<2^{m+1}$ rezultă $n=2^{m+1}-1$. Vom arăta că $n=2^p-1$, $p\in N$ este și condiția suficientă.

$$E=\left[\frac{n}{2i}\right]-\left[\frac{k}{2i}\right]-\left[\frac{n-k}{2i}\right]=\left[\frac{2^p-1}{2i}\right]-\left[\frac{k}{2i}\right]-\left[\frac{2^p-1-k}{2i}\right]=$$

$$=\left[2^{p-i}-\frac{1}{2i}\right]-\left[\frac{k}{2i}\right]-\left[2^{p-i}-\frac{k+1}{2i}\right]=2^{p-i}-1-\left[\frac{k}{2i}\right]-$$

$$-\left[2^{p-i}-\frac{k+1}{2i}\right].$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $\frac{k+1}{2i} \in Z$ avem $\left[2^{p-i} - \frac{k+1}{2i}\right] = [2^{p-i}] - \left[\frac{k+1}{2i}\right]$ și $\left[\frac{k}{2i}\right] = \left[\frac{k+1}{2i}\right] - 1$ deci $E = 0$.

Dacă $\frac{k+1}{2i} \notin N$, $\left[2^{p-i} - \frac{k+1}{2i}\right] = 2^{p-i} - \left[\frac{k+1}{2i}\right] - 1$ și $E = \left[\frac{k+1}{2i}\right] - \left[\frac{k}{2i}\right] = 0$ și deci $E = 0$, $(\forall)\ k = 1, 2, \ldots, n-1$; $i = 1, 2, 3, \ldots$

60. $T_{k+1} = C_n^k 3^{n-k} 2^k$; $T_k = C_n^{k-1} 3^{n-k+1} 2^{k-1}$ și deci $\frac{T_{k+1}}{T_k} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n-k+1}{k}$. Fie T_{k_0} coeficientul maxim (sau unul dintre ei în cazul în care sînt mai mulți).

Avem evident $\frac{T_{k_0+1}}{T_{k_0}} \leqslant 1$ și $\frac{T_{k_0}}{T_{k_0-1}} \geqslant 1$ adică

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{(n-k_0+1)}{k_0} \leqslant 1 \text{ și } \frac{2}{3} \cdot \frac{n-k_0+2}{k_0-1} \geqslant 1 \text{ adică}$$

$$\frac{2}{5}(n+1) \leqslant k_0 \leqslant \frac{2}{5}(n+1) + 1.$$

Pentru $n = 50$ rezultă $\frac{102}{5} \leqslant k_0 \leqslant \frac{107}{5}$. Cum $k_0 \in N$ rezultă $k_0 = 21$ și din $T_{21} = C_{50}^{20} 3^{30} 2^{20}$. Între coeficienți avem inegalitatea

$$T_0 \leqslant T_1 \leqslant \ldots \leqslant T_{21} \geqslant T_{22} \geqslant \ldots \geqslant T_{50}.$$

61. Fie $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$; $n \geqslant 2$. Avem relațiile:

$$(1°)\ a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 0;$$

$$(2°)\ a_0 + 2a_1 + \ldots + 2^n a_n = 0.$$

Din (1°) rezultă că a_0 este par adică $a_0 = 2k$. Dacă $k \leqslant -1$ atunci $a_0 \leqslant -2$ și enunțul se justifică. Presupunem $k \geqslant 0$; egalitatea (2°) se scrie:

$$-2^n a_n = 2k + 2a_1 + \ldots + 2^{n-1} a_n \text{ și deci}$$

$$-2^{n-1} a_n \geqslant a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^{n-2} a_{n-1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $a_i \geqslant -1$; $i = 1, 2, \ldots, n-1$ rezultă $-2^{n-1}a_n \geqslant$ $\geqslant -(1 + 2 + \ldots + 2^{n-2}) = 1 - 2^{n-1}$ și deci $2^{n-1}(1 - a_n) \geqslant 1$ și deci $1 - a_n \geqslant 1$ adică $a_n \leqslant 0$. Cum $a_n \neq 0$ rezultă $a_n \leqslant -1$. Pentru $a_n \leqslant -2$ enunțul se justifică. Rămîne de studiat cazul $a_n = -1$. Egalitatea (2°) se scrie:

$$2k + 2a_1 + \ldots + a^{n-1}a_{n-1} = -2^n \text{ sau}$$

(3°) $k + a_1 + \ldots + 2^{n-2}a_{n-1} = -2^{n-1}$. Scăzînd egalitatea (3°) și (1°) avem:

$$-k + a_2(2 - 1) + (2^2 - 1)a_3 + \ldots + (2^{n-2} - 1)a_{n-1} = \\ = -2^{n-1} + 1.$$

Dacă $a_i \geqslant -1$; $i = 2, \ldots, n-1$ atunci $1 - 2^{n-1} \geqslant -k +$ $+ n - 2 - 2^{n-1} + 1$ și deci $k \leqslant 2 - n$ ceea ce contrazice ipoteza $k \geqslant 0$ pentru $n \geqslant 3$; pentru $n = 2$ polinoamele sînt $P(x) = a\,(x^2 - 3x + 2)$ care evident verifică condiția. Așadar, cel puțin un coeficient este mai mic decît -1.

62. Răspunsul este negativ. Într-adevăr, polinomul

$$P(x) = n!\,x^n + (n^2 + n + 1)x^{n-1} - (n! + 1)x + (2n)! + 3$$

face parte din $Z[x]$ și are termenul liber $(2n)! + 3$ un număr impar, iar printre ceilalți coeficienți există doi care sînt impari și anume:

$n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$ (n și $n+1$ sînt factori consecutivi)

$n! + 1 =$ număr impar pentru orice $n \geqslant 2$.

63. Fie polinomul

$$P(x) = a_0x^{4n} + a_1x^{4n-1} + \ldots + a_{4n-1}x + a_{4n}$$

din $Z[x]$. Conform condițiilor problemei va fi suficient să arătăm că șirul

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{4n-1}$$

conține un număr par de termeni impari, ceea ce rezultă imediat deoarece:

a) dacă rația este un număr par atunci sau toți cei $4n$ termeni ai șirului sînt pari (în cazul cînd a_0 este par), sau toți sînt impari (în cazul cînd a_0 este impar);

b) dacă rația este un număr impar atunci jumătate (adică $2n$) din termenii șirului sînt impari.

Scanned with OKEN Scanner

64. Fie

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

avînd abaterea de la zero δ pe $[-2, 2]$.

Rezolvăm problema transformînd-o astfel ca să se poată pune în raport cu intervalul $[-1, 1]$. Pentru aceasta facem transformarea $Tx = 2x$ și obținem polinomul

$$P_1(x) = P(2x) = (2x)^n + a_1(2x)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(2x) + a_n =$$

$$= 2^n\left(x^n + \frac{1}{2}a_1x^{n-1} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}a_{n-1}x + \frac{1}{2^n}a_n\right).$$

Deoarece polinomul P_1 se obține din P prin transformarea menționată este evident că abaterea lui de la zero pe $[-1, 1]$ este egală cu abaterea polinomului dat P pe $[-2, 2]$.

Polinomul

$$P^*(x) = x^n + \frac{1}{2}a_1x^{n-1} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}a_{n-1}x + \frac{1}{2^n}a_n =$$

$$= \frac{1}{2^n}P_1(x)$$

are coeficientul dominant 1, iar abaterea lui de la zero va fi

$$\delta^* = \frac{1}{2^n}\delta.$$

Dar am văzut (aplicația 2) că abaterea δ nu poate fi mai mică decît $\frac{1}{2^{n-1}}$, iar egalitatea $\delta^* = \frac{1}{2^{n-1}}$ are loc numai atunci cînd

$$P^*(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x).$$

Rezultă în acest caz că

$$\delta = 2^n \cdot \delta^* = 2$$

atunci cînd

$$P_1(x) = P(2x) = 2^n\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) = 2T_n(x)$$

sau

$$P(x) = 2T_n\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos\left(n \arccos\frac{x}{2}\right).$$

Scanned with OKEN Scanner

Observație. Se poate formula problema analoagă în cazul în care în locul intervalului $[-2, 2]$ se ia un interval oarecare $[a, b]$ și se demonstrează că abaterea de la zero a polinomului $P(x)$ pe intervalul respectiv nu poate fi mai mare decît $2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n$ și este egală cu $2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n$ numai dacă

$$P_n(x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \frac{1}{2^{n-1}} T_n\left[\frac{2}{b-a}(x-a) - 1\right] =$$

$$= 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n T_n\left[\frac{2}{b-a}(x-a) - 1\right].$$

Rezultatul acesta ne arată că pentru a exista polinoame avînd coeficientul dominant egal cu 1, care în intervalul dat să ia valori oricît de mici este necesar și suficient ca lungimea intervalului să fie mai mică decît patru.

65. Fie punctele M, A_1, A_2, ..., A_n figurate în plan în raport cu un sistem rectangular și numerele complexe z, z_1, z_2, ..., z_n afixele lor.

Atunci

$$MA_k = |z - z_k|, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

și

$$\prod_{k=1}^{k} MA_k = \prod_{k=1}^{n} |z - z_k| = \left|\prod_{k=1}^{n} (z - z_k)\right| = |P(z)|$$

unde am notat cu $P(z)$ polinomul

$$\prod_{k=1}^{n} (z - z_k) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n).$$

Acesta se mai poate scrie sub forma

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

care este un polinom cu coeficientul dominant egal cu 1 și cu rădăcinile z_1, z_2, ..., z_n.

În felul acesta problema este similară aplicației 2 ca fiind o problemă de studierea minimului abaterii de la zero. Se pot alege axele de coordonate astfel ca segmentul de lungime l să se afle pe axa absciselor (axa numerelor reale) avînd mijlocul în origine. Atunci problema se reformulează

Scanned with OKEN Scanner

astfel: care este cea mai mică valoare pe care poate să o ia abaterea de la zero în intervalul $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$ a polinomului $P(z)$[1].

Fie deci

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k} \quad \text{unde} \quad a_0 = 1$$

și numerele a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sînt în general complexe. Să presupunem,

$$a_k = \alpha_k + i\beta_k, \quad \alpha_k, \ \beta_k \in R, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\alpha_0 = 1, \qquad \beta_0 = 0.$$

Atunci

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k + i\beta_k)\ z^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^{n-k} + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{n} \beta_k z^{n-k} = P_1(z) + \mathrm{i}\ P_2(z)$$

unde P_1 și P_2 sînt polinoame cu coeficienți reali, P_1 avînd gradul n și coeficientul dominant 1, iar P_2 avînd gradul cel mult $n - 1$.

Deoarece

$$|\ P(z)\ | = \sqrt{P_1^2(z) + P_2^2(z)} \geqslant |\ P_1(z)\ |$$

deducem că abaterea de la zero a polinomului $P(z)$ în intervalul $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$ nu este mai mare decît abaterea de la zero în același interval a polinomului $P_1(z)$ despre care am văzut că nu este mai mare decît $2\left(\frac{l}{4}\right)^n$. Așadar, nici abaterea polinomului $P(z)$ nu va fi mai mare decît $2\left(\frac{l}{4}\right)^n$.

---

[1] Este evident că deși polinomul P are coeficienți complecși, definiția abaterii de la zero pe un interval $[a, b]$ se folosește la fel ca și în cazul coeficienților reali adică Max $|\ P(x)\ |$, $x \in [a, b]$.

Scanned with OKEN Scanner

Să vedem acum în ce caz există egalitatea. Va trebui ca polinomul $P_1(z)$ să coincidă cu polinomul

$$2\left(\frac{l}{4}\right)^n \cdot T_n\left(\frac{2z}{l}\right),$$

iar polinomul $P_2(z)$ să se anuleze în toate acele puncte în care valoarea absolută a polinomului

$$P_1(z) = 2\left(\frac{l}{4}\right)^n \cdot T_n\left(\frac{2z}{l}\right)$$

este maximă, deci egală cu $2\left(\frac{l}{4}\right)^n$.

Dar am văzut că există $n+1$ astfel de puncte și prin urmare $P_2(z)$, care are gradul cel mult $n-1$, trebuie să se anuleze în $n+1$ puncte. Aceasta înseamnă că el trebuie să fie identic nul. Atunci

$$P(z) = 2\left(\frac{l}{4}\right)^n \cdot T_n\left(\frac{2z}{l}\right).$$

Din cele de mai sus rezultă că dacă punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt fixe, iar M variabil pe segmentul dat PQ, atunci produsul $MA_1 \cdot MA_2 \ldots MA_n$, ia cel puțin o dată o valoare care nu este mai mică decît $2\left(\frac{l}{4}\right)^n$. Cît privește faptul ca el să nu ia nici o valoare mai mare decît $2\left(\frac{l}{4}\right)^n$ este necesar ca punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ să se afle chiar pe segmentul PQ. Dacă se consideră în sistemul de referință ca axă a absciselor o dreaptă pe care este suprapus segmentul PQ, iar ca origine mijlocul acestuia, atunci punctele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ care corespund rădăcinilor ecuației

$$T_n\left(\frac{2z}{l}\right) = 0$$

vor avea distanțele la origine (deci la mijlocul lui PQ) egale cu

$$\frac{l}{2}\cos\frac{\pi}{2n}, \quad \frac{l}{2}\cos\frac{3\pi}{2n}, \quad \frac{l}{2}\cos\frac{5\pi}{2n}, \quad \ldots, \quad \frac{l}{2}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Capitolul V

1. a) Considerînd polinomul de nedeterminată x

$$P(x) = (x + y)^3 - x^3 - y^3$$

el este divizibil prin x deoarece făcînd $x = 0$ avem $P(0) = 0$. Analog, el este divizibil prin y, deci este divizibil prin produsul xy.

Dar P este un polinom omogen de gradul trei și simetric în cele două nedeterminate. Atunci el va conține și un factor omogen de gradul întîi, simetric în x și y, deci va fi de forma

$$(x + y)^3 - x^3 - y^3 = kxy(x + y)$$

k fiind o constantă arbitrară.

Întrucît egalitatea aceasta este în fapt o identitate, constanta k se determină dînd nedeterminatelor valori particulare convenabil alese. De pildă, pentru $x = y = 1$ avem

$$2k = 6 \qquad \text{deci} \qquad k = 3.$$

Atunci

$$(x + y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy(x + y).$$

b) Ca și în cazul precedent considerînd

$$P(x) = (x + y)^5 - x^5 - y^5$$

avem $P(0) = 0$ deci P se divide prin x. Analog el se divide prin y și cum

$$P(-y) = -(-y)^5 - y^5 = 0$$

rezultă că P se divide și prin $x + y$. Așadar, P care este un polinom omogen de gradul cinci și simetric este divizibil prin $xy(x + y)$ care este un polinom omogen de gradul trei și

Scanned with OKEN Scanner

simetric. În consecință, P va fi divizibil și printr-un factor omogen de gradul doi simetric, deci va fi de forma

$$(x+y)^5 - x^5 - y^5 = kxy(x+y)(x^2+xy+y^2).$$

Luînd $x = y = 1$ avem $k = 5$, deci

$$(x+y)^5 - y^5 = 5xy(x+y)(x^2+xy+y^2).$$

c) Ca și în cazurile precedente, polinomul $(x+y)^7 - x^7 - y^7$ este divizibil prin $xy(x+y)$, deci el va conține și un factor omogen de gradul patru simetric în x și y.

Un astfel de factor este

$$Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Bxy^3 + Ay^4$$

încît avem

$$(x+y)^7 - x^7 - y^7 = xy(x+y)(Ax^4 + Bx^3y + Cx^2y^2 + Bxy^3 + Ay^4)$$

de unde, efectuînd calculele, avem

$$7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 = Ax^6y + (A+B)x^5y^2 + (B+C)x^4y^3 + (B+C)x^3y^4 + (A+B)x^2y^5 + Axy^6$$

iar după identificare

$$A = 7;\quad A + B = 21;\quad B + C = 35 \text{ deci } B = 14;\quad C = 21$$

și prin urmare

$$(x+y)^7 - x^7 - y^7 = xy(x+y)(7x^4 + 14x^3y + 21x^2y^2 + 14xy^3 + 7y^4) = 7xy(x+y)(x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4) = 7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2.$$

2. a) Considerînd polinomul în nedeterminata x și făcînd $x = 0$ avem

$$(y+z)^3 - (y+z)^3 - (-y+z)^3 - (y-z)^3 = 0$$

deci el se divide prin x, analog prin y și prin z și fiind omogen de gradul trei va fi de forma $kxyz$. Luînd $x = y = z = 1$, obținem $k = 24$, deci polinomul dat descompus în factori este $24xyz$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Ca și în cazul precedent, făcînd de data aceasta $x = -y$ avem

$$y^2(y + z) + y^2(z - y) - 2y^2z = 0$$

deci polinomul dat este divizibil prin $x + y$; analog el este divizibil prin $y + z$ și prin $z + x$ și fiind omogen de gradul trei va fi de forma

$$k(x + y)\ (y + z)\ (z + x).$$

Dacă luăm $x = 0$, $y = z = 1$ obținem $k = 1$ și prin urmare rezultatul este

$$(x + y)\ (y + z)\ (z + x).$$

c) Dacă luăm $x = -(y + z)$ avem

$$(y + z)^3 - y^3 - z^3 - 3yz(y + z) = 0$$

deci polinomul este divizibil prin $x + y + z$. Dar el este omogen de gradul trei și simetric în toate nedeterminatele încît, va fi de forma

$$(x + y + z)\ [a(x^2 + y^2 + z^2) + b(xy + yz + xz)].$$

Identificînd coeficientul lui x^3 avem $a = 0$, iar identificînd coeficientul lui x^2 avem $b = 1$. Prin urmare

$$x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y) + 3xyz = \\ = (x + y + z)\cdot(xy + yz + xz).$$

3. *Observație importantă.* Spunem că un polinom de mai multe nedeterminate $P(..., x, y, ...)$ este antisimetric în x și y dacă

$$P(..., y, x, ...) = -P(..., x, y, ...)$$

Exemplu. $P(x, y) = x - y$; $P(y, x) = -P(x, y)$.

Dacă vom considera un astfel de polinom ca polinom de o singură nedeterminată, de pildă $Q(x)$, atunci făcînd $x = y$, avem $Q(y) = P(..., y, y, ...)$. Dar conform definiției polinomului antisimetric avem

$P(..., y, y, ...) = -P(..., y, y, ...)$ deci $P(..., y, y, ...) = 0$

și prin urmare $Q(y) = 0$ adică Q este divizibil prin $x - y$.

Deci, *dacă P este un polinom antisimetric în x și y, el este divizibil prin $x - y$.*

Scanned with OKEN Scanner

În cazul nostru, cele două polinoame sînt antisimetrice în x și y, deci ele sînt divizibile prin $x - y$. Analog, ele sînt divizibile prin $y - z$ și prin $z - x$.

În continuare:

a) polinomul $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$ care este omogen de gradul trei și divizibil prin $(x-y)(y-z)(z-x)$ va fi de forma

$$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = k(x-y)(y-z)(z-x)$$

și luînd $x = 0$, $y = -1$; $z = 1$ obținem $k = -1$, deci

$$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = -(x-y)(y-z)(z-x).$$

b) polinomul $x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y)$ fiind omogen de gradul patru și divizibil prin $(x-y)(y-z)(z-x)$ va fi divizibil și printr-un factor omogen de gradul întîi, deci vom avea

$$x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y) = \\ = (x-y)(y-z)(z-x)(ax + by + cz)$$

și identificînd coeficienții termenilor care conțin x^3, y^3, z^3 obținem

$$a = b = c = -1$$

deci

$$x^3(y-z) + y^3(z-x) + z^3(x-y) = \\ = -(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z).$$

4. *Observație.* Dacă $P(x, y)$ este un polinom omogen de gradul n

$$P(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n$$

el se mai poate scrie

$$P(x, y) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} y^k$$

și substituind $x = ty$ obținem

$$P(y, ty) = \sum_{k=0}^{n} a_k (ty)^{n-k} y^k = y^n \sum_{k=0}^{n} a_k t^{n-k}$$

care este produsul dintre monomul y^n și polinomul de o singură determinată $Q(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^{n-k}$.

Scanned with OKEN Scanner

Această observație este utilă în multe aplicații privitoare la polinoamele omogene.

În cazul nostru vom avea

$$x^{2n} + px^n y^n + qy^{2n} = y^{2n}(t^{2n} + pt^n + q);$$

$$x^2 + xy + y^2 = y^2(t^2 + t + 1)$$

și se vede că problema revine la a cerceta condițiile de divizibilitate ale polinomului $P(t) = t^{2n} + p \cdot t^n + q$ prin polinomul $Q(t) = t^2 + t + 1$.

Dar polinomul P este divizibil prin polinomul Q dacă orice rădăcină $t = \alpha$ a lui Q este rădăcină și a lui P. Știm însă că din $Q(\alpha) = 0$, adică $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ rezultă $\alpha^3 - 1 = 0$ deci $\alpha^3 = 1$.

Condiția $P(\alpha) = 0$ ne dă

$$\alpha^{2n} + p \cdot \alpha^n + q = 0$$

și considerînd $n = 3k + r$ cu $k \in N$ și $r \in \{0, 1, 2\}$ vom avea

$$\alpha^{6k+2r} + p \cdot \alpha^{3k+r} + q = 0$$

egalitate care, ținînd seamă că $\alpha^3 = 1$, devine

$$\alpha^{2r} + p \cdot \alpha^r + q = 0.$$

Aceasta înseamnă că:

a) $p + q + 1 = 0$ dacă $r = 0$, adică pentru $n = 3k$;

b) $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$ dacă $r = 1$;

$\alpha^4 + p\alpha^2 + q = 0$ dacă $r = 2$;

ceea ce, ținînd seamă că $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ și $\alpha^3 = 1$, revine la:

$$\alpha^2 + p\alpha + q = -\alpha - 1 + p\alpha + q = \alpha(p - 1) + q - 1 = 0$$

deci, $p = 1$, $q = 1$

și respectiv

$$\alpha^4 + p\alpha^2 + q = \alpha + p(-1 - \alpha) + q = \alpha(1 - p) - p + q = 0$$

de unde $p = 1$; $q = 1$.

5. Conform observației de la exercițiul anterior problema revine la a studia condițiile de divizibilitate ale polinomului

$$Q(t) = (t + 1)^n - t^n - 1 \text{ prin } t^2 + t + 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ținînd seamă, ca și mai înainte, că dacă $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ atunci $\alpha^3 = 1$ vom considera $n = 3m + r$, $r \in \{0, 1, 2\}$ și vom avea

$$Q(\alpha) = (-\alpha^2)^{3m+r} - \alpha^{3m+r} - 1 = (-1)^m \cdot (-\alpha^2)^r - \alpha^r - 1.$$

a) Dacă $m = 2p$ deci dacă $n = 6p + r$ avem

$$Q(\alpha) = (-\alpha^2)^r - \alpha^r - 1 = \begin{cases} -1 & \text{dacă } r = 0 \\ 0 & \text{dacă } r = 1 \\ \alpha^4 - \alpha^2 - 1 & \text{dacă } r = 2 \end{cases}$$

și cum $\alpha^4 - \alpha^2 - 1 \neq 0$ rezultă că un prim caz în care P este divizibil prin $x^2 + xy + y^2$ este acela cînd $n = 6p + 1$.

Să mai adăugăm că, în acest caz,

$$Q(t) = (t + 1)^{6m+1} - t^{6m+1} - 1$$

iar

$$Q'(t) = (6m + 1)\,[(t + 1)^{6m} - t^{6m}]$$

și cum

$$(\alpha + 1)^{6m} - \alpha^{6m} = (-\alpha^2)^{6m} - \alpha^{6m} = (\alpha^3)^{4m} - (\alpha^3)^{2m} = 0$$

deducem că și Q' este divizibil prin $t^2 + t + 1$ și prin urmare Q este divizibil prin $(t^2 + t + 1)^2$. Așadar în acest caz P este divizibil prin $(x^2 + xy + y^2)^2$.

b) Dacă $m = 2p + 1$ deci $n = 6p + r + 3$ avem

$$Q(\alpha) = -(-\alpha^2)^r - \alpha^r - 1 = \begin{cases} -3 & \text{dacă } r = 0 \\ \alpha^2 - \alpha - 1 & \text{dacă } r = 1 \\ -\alpha^4 - \alpha^2 - 1 & \text{dacă } r = 2 \end{cases}$$

și cum $\alpha^4 + \alpha^2 + 1 = \alpha + \alpha^2 + 1 = 0$ rezultă că $P(x, y)$ este divizibil prin $x^2 + xy + y^2$ și în cazul cînd $n = 6p + 5$ deci dacă $n = 6p - 1$.

6. Notînd $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$ trebuie să arătăm că $3S_2S_5 = 5S_3S_4$.

Dar din ecuația dată avem

$$s_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$s_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = p$$
$$s_3 = x_1x_2x_3 = q$$

de unde rezultă $S_1 = s_1 = 0$; $S_2 = s_1^2 - 2s_2 = -2p$, iar pentru a calcula sumele S_3, S_4, S_5 considerăm polinomul

$$P(x) = x^\alpha (x^3 + px + q) = x^{\alpha+3} + px^{\alpha+1} + qx$$

Scanned with OKEN Scanner

și cum $P(x_k) = 0$, $k = 1, 2, 3$ avem

$$x_k^{\alpha+3} + px_k^{\alpha+1} + qx_k = 0.$$

Însumînd după $k = 1, 2, 3$, avem

$$S_{\alpha+3} + p \cdot S_{\alpha+1} + q \cdot S_\alpha = 0$$

de unde:

— pentru $\alpha = 0$ obținem $S_3 + pS_1 + 3q = 0$ adică $S_3 = -3q$;

— pentru $\alpha = 1$ $S_4 + pS_2 + qS_1 = 0$ deci $S_4 = 2p^2$;

— pentru $\alpha = 2$ $S_5 + pS_3 + qS_2 = 0$ deci $S_5 = 5pq$.

În felul acesta egalitatea de dovedit este evidentă deoarece

$$3S_2S_5 = 5S_3S_4 = -30p^2q.$$

7. Notînd $ab + ac + bc = m$; $abc = n$ avem:

$a^2 + b^2 + c^2 = k^2 - 2m$;

$a^3 + b^3 + c^3 = k(k^2 - 3m) + 3n = k^3 - 3km + 3n$;

$a^4 + b^4 + c^4 = k(k^3 - 3km + 3n) - m(k^2 - 2m) + kn =$
$= k^4 - 4mk^2 + 4kn + 2m^2$;

$a^5 + b^5 + c^5 = k(k^4 - 4mk^2 + 4kn + 2m^2) - m(k^3 - 3km + 3n) +$
$+ n(k^2 - 2m) - k^5 - 5mk^3 + 5nk^2 + 5m^2k - 5mn.$

Se vede că:

$a^2 + b^2 + c^2 + k^2 = 2(k^2 - m)$

$a^3 + b^3 + c^3 - k^3 = 3(n - km)$

$a^5 + b^5 + c^5 - k^5 = 5(-mk^3 + nk^2 + m^2k - mn) =$
$= 5(k^2 - m)(n - km)$

și egalitatea cerută se verifică imediat.

8. Deoarece $s_1 = s_2 = 0$; $s_3 = 1$; $s_4 = 0$; $s_5 = -1$ conform formulelor lui *Newton* avem

$S_1 = s_1 = 0$; $S_2 = s_1^2 - 2s_2 = 0$; $S_3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3 = 3$

și cum $x_k^5 = x_k^2 - 1$, $k = 1, 2, \ldots, 7$
după însumare obținem

$$S_5 = S_2 - 7 = -7.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar, avem și $x_k^8 = x_k^5 - x_k^3$ (după înmulțirea egalității de mai sus cu x_k^3) și prin însuumare

$$S_8 = S_5 - S_3 = -7 - 3 = -10.$$

9. Am văzut că $\sum_{i \neq j} x_i^3 x_j^2 = S_3 S_2 - S_5$

și cum în cazul de față $s_1 = 0$; $s_2 = 3$; $s_3 = 5$ ținînd seamă și de rezultatele stabilite în problema precedentă avem:

$$S_2 = -6; \quad S_3 = 15; \quad S_5 = -75.$$

Atunci

$$\sum_{i \neq j} x_i^3 x_j^2 = -90 + 75 = -15.$$

10. Deoarece $s_1 = s_2 = \ldots = s_6 = 0$; $s_7 = 1$ conform formulelor lui *Newton* vom avea

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = 0$$

și cum din ecuația dată avem

$$x_k^{7+\alpha} - x_k^{\alpha} = 0; \quad k = 1, 2, \ldots, 7, \quad \alpha \in N,$$

deducem că $S_7 = 7$; de asemenea, rezultă că $S_i = 0$ dacă $i \neq 7m$, $m \in N$ (deci pentru i nedivizibil prin 7) și $S_i = 7$ dacă $i = 7m$.

În cazul nostru $S_7 = S_{14} = 7$ și $S_i = 0$ dacă $i \in \{1, 2, 3, \ldots, 20\} - \{7, 14\}$.

Atunci pentru suma cerută vom avea

$$S = \sum (x_1 + x_2)^{20} = \sum \left(\sum_{i=0}^{20} C_{20}^i x_1^{20-i} x_2^i \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{20} C_{20}^i \left(\sum x_1^{20-i} x_2^i \right) = \sum_{i=0}^{20} C_{20}^i (S_{20-i} S_i - S_{20}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{20} C_{20}^i S_{20-i} S_i = C_{20}^7 S_{13} S_7 + S_{20}^{14} S_6 \cdot S_{14} = 0$$

11. Notînd sumele simetrice fundamentale $x + y + z$; $xy + yz + xz$; xyz cu u, v și respectiv w și considerînd

$$S_n = x^n + y^n + z^n$$

Scanned with OKEN Scanner

avem $n = 2$ și

$$S_2 = x^2 + y^2 + z^2 = u^2 - 2v = 4 - 2v$$

$$S_3 = x^3 + y^3 + z^3 = u \cdot S_2 - v \cdot S_1 + 3w = 8 - 6v + 3w$$

$$S_4 = u \cdot S_3 - v \cdot S_2 + w \cdot S_1 = 16 - 12v + 6w - 4v + 2v^2 + 2w = 2v^2 - 16v + 8w + 16$$

și cum $S_4 = x^4 + y^4 + z^4 = 8$ rezultă că $2v^2 - 16v + 8w + 16 = 8$ deci $v^2 - 8v + 4w + 4 = 0$.

De asemenea,

$$S_5 = uS_4 - vS_3 + wS_2 = 16 - 8v + 6v^2 - 3vw + 4w - 2vw = 6v^2 - 5vw - 8v + 4w + 16$$

și cum $S_5 = x^5 + y^5 + z^5 = 32$ rezultă că $6v^2 - 5vw - 8v + 4w + 16 = 32$ deci $6v^2 - 5v \cdot w - 8v + 4w - 16 = 0$.

Problema necesită în continuare rezolvarea sistemului de ecuații

$$\begin{cases} 6v^2 - 5vw - 8v + 4w - 16 = 0 \\ v^2 - 8v + 4w + 4 = 0 \end{cases}$$

echivalent, după eliminarea lui v^2 cu sistemul:

$$\begin{cases} v^2 - 8v + 4w + 4 = 0 \\ 8v - 4w - vw - 8 = 0 \end{cases}$$

din care, eliminînd w, avem $v^3 - 4v^2 + 4v - 16 = 0$ care se mai scrie $(v - 4)(v^2 + 4) = 0$ și vom avea două cazuri:

1) $v - 4 = 0$. Atunci, $v = 4$, $w = 3$ și prin urmare

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ xy + yz + xz = 4 \\ xyz = 3 \end{cases}$$

sistem a cărui rezolvare revine la rezolvarea ecuației de gradul trei

$$t^3 - 2t^2 + 4t - 3 = 0$$

ale cărei rădăcini sînt $t_1 = 1$; $t_2 = \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

Așadar, o soluție a sistemului va fi

$$x_1 = 1;\ y_1 = \frac{1 + i\sqrt{11}}{2};\quad z_1 = \frac{1 - i\sqrt{11}}{2}$$

și cum el este simetric în x, y, z obținem alte cinci soluții ale sale prin permutările acestei soluții.

2) $v^2 + 4 = 0;\quad v = \pm 2i$

— dacă $v = 2i$ atunci $w = 4i$ și deci

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ xy + yz + xz = 2i \\ xyz = 4i \end{cases}$$

care ne dă ecuația $t^3 - 2t^2 + 2it - 4i = 0$ adică $(t - 2) \cdot (t^2 + 2i) = 0$; vom avea soluțiile $x_2 = 2$; $y_2 = \sqrt{-2i}$; $z_2 = -\sqrt{-2i}$ și permutările acestora.

— dacă $v = -2i$ atunci $w = -4i = 0$ adică $(t - 2) \cdot (t^2 - 2i) = 0$; vom avea soluțiile $x_3 = 2$; $y_3 = \sqrt{2i}$; $z_3 = -\sqrt{2i}$ și permutările acestora.

12. Sistemul se mai scrie

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + xz) = 78 \\ x(3 - x)^2 + y(3 - y)^2 + z(3 - z)^2 = -102 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + xz) = 39 \\ x^3 + y^3 + z^3 - 6(x^2 + y^2 + z^2) = -129 \end{cases}$$

și utilizînd notațiile din exercițiul precedent avem $u = 3$, iar din ecuația a doua $9 - 3v = 39$ deci $v = -10$.

Cum $S_2 = x^2 + y^2 + z^2 = u^2 - 2v = 29$ și

$$S_3 = x^3 + y^3 + z^3 = u \cdot S_2 - v \cdot S_1 + 3w = 87 + 30 + 3w = 3w + 117$$

ecuația a treia a sistemului ne dă

$$3w + 117 - 174 = -129$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde $w = -24$ și rezolvarea sistemului revine la rezolvarea ecuației

$$t^3 - 3t^2 - 10t + 24 = 0; \quad t_1 = -3; \quad t_2 = 2; \quad t_3 = 4.$$

Soluțiile sistemului vor fi $(-3, 2, 4)$ și permutările acestei mulțimi.

13. Vom nota $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 11$ ale cărui sume *Viète* (sumele simetrice fundamentale ale rădăcinilor) sînt:

$$x_1+x_2+x_3 = 3; \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -6; \quad x_1x_2x_3 = -11$$

și vom calcula sumele de acest tip pentru ecuația pe care o căutăm.

Avem

$$S_1 = y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

$$S_2 = (x_2 - x_3)(x_3 - x_1) + (x_3 - x_1)(x_1 - x_2) +$$

$$+ (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

și cum

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 21$$

rezultă $S_2 = -27$.

Se vede că valorile sumelor S_1 și S_2 nu depind de semnele numerelor y_1, y_2, y_3 deci de ordinea numerelor x_1, x_2, x_3.

Pentru a calcula

$$S_3 = (x_1 - x_2)\ (x_2 - x_3)\ (x_3 - x_1)$$

vom porni de la

$$P(x) = (x - x_1)\ (x - x_2)\ (x - x_3)$$

a cărui derivată este

$$P'(x) = (x - x_2)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_2)$$

și vom observa că

$$P'(x_1) = (x_1 - x_2)\ (x_1 - x_3);$$

$$P'(x_2) = (x_2 - x_1)\ (x_2 - x_3);$$

$$P'(x_3) = (x_3 - x_1)\ (x_3 - x_2)$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă că

$$S_3^2 = -P'(x_1) \cdot P'(x_2) \cdot P'(x_3).$$

Dar

$$P'(x) = 3x^2 - 6x - 6 = 3(x^2 - 2x - 2)$$

și fie u, v rădăcinile sale.

Atunci $P'(x) = 3(x - u) \cdot (x - v)$ și prin urmare

$$S_3^2 = -27(x_1 - u)\,(x_1 - v)\,(x_2 - u)\,(x_2 - v)\,(x_3 - u)\,(x_3 - v)$$

sau

$$S_3^2 = -27\,(u - x_1)\,(u - x_2)\,(u - x_3)\,(v - x_1)\,(v - x_2)\,(v - x_3)$$

adică

$$S_3^2 = -27P(u) \cdot P(v).$$

Dar

$$P(u) = u^3 - 3u^2 - 6u + 11$$

și cum $u^2 - 2u - 2 = 0$ (u fiind rădăcină a lui P') vom avea

$$u^2 = 2u + 2; \quad u^3 = 2u^2 + 2u = 6u + 4$$

deci $P(u) = -6u + 9$ și analog $P(v) = -6v + 9$.

Prin urmare, ținînd seamă că $u + v = 2$; $uv = -2$ avem

$$S_3^2 = -27(6u - 9)(6v - 9) = -243[4uv - 6(u + v) + 9] = 2\,673.$$

Atunci $S_3 = \pm 9\sqrt{33}$, iar alegerea semnului lui S_3 depinde de semnele numerelor y_1, y_2, y_3 acestea, la rîndul lor, depinzînd de ordinea numerelor x_1, x_2, x_3. Dacă, de pildă, presupunem că notarea x_1, x_2, x_3 respectă ordinea crescătoare a rădăcinilor ecuației date atunci

$$y_1 = x_2 - x_3 < 0; \quad y_2 = x_3 - x_1 > 0; \quad y_3 = x_1 - x_2 < 0$$

și prin urmare

$$S_3 = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 > 0$$

deci vom avea $S_3 = 9\sqrt{33}$, iar ecuația cerută va fi

$$y^3 - 27y - 9\sqrt{33} = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă însă rădăcinile ecuației $P(x)=0$ sînt în ordinea $x_2<x_1<x_3$ atunci

$$y_1<0;\quad y_2>0;\quad y_3>0.$$

deci $S_3<0$ adică $S_3=-9\sqrt{33}$, iar ecuația va fi y^3-9y- $-9\sqrt{33}=0$.

14. Notăm $y_1=\frac{x_1}{x_2}$; $y_2=\frac{x_2}{x_3}$, $y_3=\frac{x_3}{x_1}$ și formăm sumele *Viète*

$$s_1=y_1+y_2+y_3=\frac{x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_3^2x_2}{x_1x_2x_3}=-u$$

$$s_2=y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=\frac{x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1}{x_1x_2x_3}=-v$$

$$s_3=y_1y_2y_3=1$$

unde am ținut seamă că $x_1x_2x_3=-1$ și am notat

$$x_1^2x_3+x_2^2x_1+x_3^2x_2=u;\quad x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_1=v.$$

Ecuația va fi $y^3+uy^2-vy-1=0$

$$u+v=\sum_{i\neq j}x_i^2x_j,\quad i=1,\,2,\,3,\quad j=1,\,2,\,3,$$

adică

$$u+v=S_1S_2-S_3=1 \text{ deoarece}$$

$$S_1=x_1+x_2+x_3=1;\quad S_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2=5 \text{ și}$$

$$S_3=S_2+2S_1-3=4.$$

Pe de altă parte, avem $u=-\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_1}\right)$

$$\text{și}\quad v=-\left(\frac{x_1}{x_3}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}\right)$$

încît

$$uv=\sum\frac{x_1^2}{x_2x_3}+\sum\frac{x_2x_3}{x_1^2}+3.$$

Dar

$$\sum\frac{x_1^2}{x_2x_3}=\frac{S_3}{x_1x_2x_3}=-4$$

Scanned with OKEN Scanner

iar pentru a calcula

$$\sum \frac{x_2x_3}{x_1^2} = x_1x_2x_3 \sum \frac{1}{x_1^3} = -\sum \frac{1}{x_1^3}$$

vom face în ecuația dată transformarea

$$x = \frac{1}{y}$$

și obținem ecuația $y^3 - 2y^2 - y + 1 = 0$ încît vom avea

$$\sum \frac{1}{x_1^3} = \sum y_1^3 = 2\sum y_1^2 + \sum y_1 - 3 = 11$$

deci

$$\sum \frac{x_2x_3}{x_1^2} = -11 \text{ și prin urmare}$$

$$uv = -12.$$

Așadar, $u + v = 1$; $uv = -12$ și vom avea $u = 4$; $v = -3$ sau $u = -3$, $v = 4$ corespunzător cărora rezultă ecuațiile

$$y^3 + 4y^2 + 3y - 1 = 0 \text{ și respectiv } y^3 - 3y^2 - 4y - 1 = 0,$$

iar faptul că se obțin două soluții se explică prin aceea că numerele y_1, y_2, y_3 sînt dependente de ordinea numerelor x_1, x_2, x_3.

15. Deoarece $S_1 = s_1 = 0$; $S_2 = 6$, iar din ecuația (înmulțită cu x^α) rezultă

$$x_k^{\alpha+3} = 3x_k^{\alpha+1} - x_k^\alpha, \qquad k = 1, 2, 3,$$

vom avea:

$$\text{pentru } \alpha = 0 \quad S_3 = 3S_1 - 3 = -3$$
$$\text{pentru } \alpha = 1 \quad S_4 = 3S_2 - S_1 = 18$$
$$\text{pentru } \alpha = 2 \quad S_5 = 3S_3 - S_2 = -15.$$

Presupunem acum că

$$b = a + p; \quad c = a + q \quad p, q \in \mathbf{R}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci vom avea

$$E = \sum_{x_1,\ x_2,\ x_3} (ax_1 + bx_2 + cx_3)^5 =$$

$$= \sum_{x_1,\ x_2,\ x_3} [a(x_1+x_2+x_3) + px_2 + qx_3)] = \sum_{x_1,\ x_2,\ x_3} (px_2+qx_3)^5 =$$

$$= p^5S_5 + 5p^4q\sum x_1^4x_2 + 10p^3q^2\sum x_1^3x_2^2 + 10p^2q^3\sum x_1^2x_2^3 +$$

$$+ 5pq^4\sum x_1x_2^4 + q^5S_5.$$

Dar $x_i^3 = 3x_1 - 1$ și vom avea

$$\sum x_1^4x_2 = \sum x_1x_2(3x_1 - 1) = 3\sum x_1^2x_2 + 3$$

$$\sum x_1^3x_2^2 = \sum (3x_1 - 1)x_2^2 = 3\sum x_1x_2^2 - 6$$

$$\sum x_1^2x_2^3 = \sum x_1^2(3x_2 - 1) = 3\sum x_1^2x_2 - 6$$

$$\sum x_1x_2^4 = \sum x_1x_2(3x_2 - 1) = 3\sum x_1x_2^2 + 3$$

și notînd, ca în problema precedentă $\sum x_1x_2^2 = u$; $\sum x_1^2x_2 = v$ rezultă că

$$E = -15p^5 + 45p^4q(v + 1) + 30p^3q^2(u - 2) +$$

$$+ 30p^2q^3(v - 2) + 45pq^4(u + 1) - 15q^5 =$$

$$= -15[p^5 + q^5 - upq^2(2p^2 + 3q^2) - vp^2q(3p^2 + 2q^2) -$$

$$- pq(3p^3 - 4p^2q - 4pq^2 + 3q^3)]$$

în care $p = b - a$; $q = c - a$, iar u și v se calculează ca în exercițiul anterior.

Se obține $u + v = 3$; $uv = -18$, prin urmare $u = 6$; $v = -3$ sau $u = -3$; $v = 6$ și corespunzător lor două soluții pentru E.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

[1] Abramescu N., *Lecțiuni de algebră superioară*, Fac., de științe din Cluj, 1920;

[2] Arghiriade E., Dragomir A., Dragomir, P., *Algebră*, Edit. did. și ped., Buc., 1964;

[3] Briot Ch., *Leçons d'algèbre*, Paris, 1892;

[4] Coșniță C., Turtoiu E., *Culegere de probleme de algebră*, Edit. tehnică, Buc. 1961;

[5] Fadeev D., Sominski I., *Recueil d'exercices a'algèbre supérieure*, Moscova, 1972;

[6] Galbură Gh., *Introducere în algebră*, Edit. tehnică, Buc. 1969;

[7] Georgescu-Buzău E., Drăghicescu I., Matei N., *Probleme actuale de matematică în liceu* (Mulțimi-Structuri algebrice-Probabilități), Edit., Albatros, Buc., 1975;

[8] Iaglom A. M., Iaglom I. M., *Probleme neelementare tratate elementar*, Edit. tehnică, Buc., 1962;

[9] Ioachimescu A. G., *Culegere de probleme de algebră*, Ed. IV, Buc., 1939;

[10] Ion I. D., Radu N., *Algebra*, Edit. did. și ped., Buc., 1975;

[11] Ionescu V., *Curs de algebră*, Edit. de stat did. și ped., Buc., 1960;

[12] Kuroș A. G., *Curs de algebră superioară*, Edit. tehnică, Buc. 1955;

[13] Laguerre E., *Oeuvres*, Tom I (Algèbre — Calcul intégral), Paris, 1898;

[14] Lentin A., Rivand J., *Éléments d'algèbre moderne*, Lib. Vuibert, Paris, 1963.

[15] Mitrinovič D. S., *Analytic Inequalities*, Springer Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1970;

Scanned with OKEN Scanner

[16] Moisil Gr. C., *Introducere în algebră* I, Inele și ideale, vol. I, Edit. Acad. R.P.R., 1954.

[17] Panaitopol L., Ottescu C., *Probleme date la Olimpiadele de matematică* — Edit. did. și ped., Buc., 1976;

[18] Pólya G., Szegö G., *Problems and Theorems in Analysis* Vol. I, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972;

[19] Popovici C. P., *Teoria numerelor*, Edit. did. și ped., Buc. 1973;

[20] Sacter O., *Elemente de teoria ecuațiilor algebrice și transcendente*, Edit. tehnică, Buc., 1962;

[21] Sireţchi Gh., *Analiza matematică*, vol. I, Tipografia Univ. Buc., 1976; *Periodice*

The American Mathematical Monthly

Gazeta Matematică

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

— Prefață 6

CAP. I — INELUL POLINOAMELOR DE O NEDETERMINATĂ PESTE UN CORP ARBITRAR

§ 1 Preliminarii 7
§ 2 Polinom de o nedeterminată peste un corp K .. 10
§ 3 Relația de divizibilitate în inelele de polinoame .. 16
§ 4 Algoritmul împărțirii în inelele de polinoame .. 19
§ 5 Descompunerea în factori ireductibili în inelul $K[x]$ 24
§ 6 Cîteva considerații privind polinoamele numerice 27

CAP. II — INELUL DE POLINOAME $\mathcal{C}[x]$

§ 1 Proprietăți 30
— Teorema fundamentală a algebrei 33
§ 2 Cîteva rezultate remarcabile asupra rădăcinilor polinoamelor din $\mathcal{C}[x]$ 52
1 — Margini ale modulelor rădăcinilor 52
2 — Teorema lui Hurwitz 54
3 — Teorema lui Lucas 69
§ 3 Probleme 71

CAP. III — INELUL DE POLINOAME $\mathbf{R}[x]$

§ 1 Proprietăți 80
§ 2 Proprietăți referitoare la existența rădăcinilor reale ale polinoamelor din $\mathbf{R}[x]$ 83

Scanned with OKEN Scanner

§ 3 Numărul de rădăcini reale ale polinoamelor din R[x] 88
— Teorema lui Descartes 92
— Teorema lacunelor 99
— Teorema Budan-Fourier 101
— Teorema lui Sturm 106
§ 4 Marginile rădăcinilor polinoamelor din R[x] 115
§ 5 Probleme 121

CAP. IV — INELELE DE POLINOAME $Q[x]$ şi $Z[x]$

§ 1 Proprietăţi 144
§ 2 Rădăcinile polinoamelor din $Z[x]$ 147
§ 3 Cîteva familii de polinoame speciale din $K[x]$ .. 150
— Polinoamele lui Legendre 151
— Polinoamele lui Hermite 154
— Polinoamele lui Cebîşev 157
§ 4 Probleme 175

CAP. V — POLINOAME DE MAI MULTE NEDETERMINATE PESTE UN CORP OARECARE

§ 1 Definiţii 183
§ 2 Polinoame simetrice 185
§ 3 Probleme 190

SOLUŢII

Cap. II 193
Cap. III 226
Cap. IV 320
Cap. V 355

— *Bibliografie* 371

Scanned with OKEN Scanner

Lucrarea «POLINOAME ȘI ECUAȚII ALGEBRICE» prezintă sistematic una din cele mai importante părți din algebra studiată în liceu. Prin felul cum este organizată — teorie, exerciții și probleme —, lucrarea contribuie la aprofundarea materiei studiate în școală și deschide perspective largi celor care se preocupă de studiul matematicii.

Lei 10,50

Scanned with OKEN Scanner